Applications du lemme de Borel-Cantelli à la convergence presque sûre

Notions utilisées : Indépendance, liminf et sup.

Motivations

Motivations : Ce sont simplement des critères pour borner une variable aléatoire (appli 1) ou bien étudier une convergence simple selon des critères plus facilement manipulables que les définitions brutes (trouver une convergence p.s sans ça ou Borel-Cantelli : fastidieux parfois).

Prérequis : Lemme de Borel-Cantelli. Bonus : Loi du $0-1$ de Kolmogorov (non mentionné dans [Ouv2])

On rappelle le lemme de Borel-Cantelli dont on trouvera une preuve dans [Ouv2, Lemme 9.17].

Lemme (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$
2. *Si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants, alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$

Application 1. *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Alors*

$$\mathbb{P}(\sup X_n < +\infty) = 1 \Longleftrightarrow \exists a > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > a) < +\infty.$$

Preuve. **Etape 1 : sens indirect**. Cela découle du Lemme de Borel-Cantelli : on a $\mathbb{P}(\limsup X_n > a) = 0$. En passant au complémentaire, on a $\mathbb{P}(\liminf X_n \leq a) = 1$. Or $\{\liminf X_n \leq a\} \subset \{\sup X_n < +\infty\}$ d'où

$$1 = \mathbb{P}(\liminf X_n \leq a) \leq \mathbb{P}(\sup X_n < +\infty).$$

Etape 2 : sens direct. On travaille par contraposée : supposons $\forall a > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > a) = +\infty$. Par la réciproque du lemme de Borel-Cantelli, on a $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(\limsup X_n > a) = 1$. On en déduit, en traduisant cette inégalité avec $a = k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \limsup X_n > a) = 1. \tag{1}$$

Considérons un $\omega \in \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \{\limsup X_n > k\}$. Par définition, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \{\limsup X_n > k\}$ c'est à dire qu'il y a une infinité d'entiers n tels que $X_n(\omega) > k$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sup X_n(\omega) > k$.

On en déduit donc que $\sup X_n(\omega) = +\infty$. Ainsi, l'événement $\{\sup X_n = +\infty\}$ est presque sûr d'après (1) et donc en passant au complémentaire, il vient

$$\mathbb{P}(\sup X_n < +\infty) = 0.$$

Par contraposée, on obtient le sens indirect de l'équivalence que l'on cherchait à montrer. □

Application 2. *Si l'on suppose de plus que les X_n sont de même loi, alors*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \to 0\right) = 1 \iff \int_\Omega |X_1| d\mathbb{P} < +\infty.$$

Preuve. **Etape 1** : Traduire la condition de droite (avec l'intégrale) sous la forme d'une convergence de série.
On utilise tout d'abord le lemme suivant

Lemme 3. *Pour toute v.a.r X positive,* $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_\Omega X d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}(X > x) d\lambda(x)$

Preuve du lemme. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x) dx &= \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{X > x} d\mathbb{P}_X dx \\
&= \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{X > x} dx d\mathbb{P}_X \\
&= \int_\Omega \int_0^{X(\omega)} 1 dx d\mathbb{P}_X(\omega) \\
&= \int_\Omega X d\mathbb{P}_X
\end{aligned}$$

□

On a donc en particulier ici $\displaystyle\int_\Omega |X_1| d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}(|X_1| > x) dx$. On se donne alors $\varepsilon > 0$ et On découpe $\mathbb{R}_+$ en $\displaystyle\bigcup_n I_n$ où $I_n = [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon[$. Il vient alors, en considérant l'égalité dans $\mathbb{R}_+$ pour pouvoir inverser somme et intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon} \mathbb{P}(|X_1| > x) dx.$$

En particulier, puisque l'intégrande est décroissante, on obtient

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| > (n+1)\varepsilon) \leq \int_\Omega |X_1| d\mathbb{P}_X \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n\varepsilon) dx. \tag{2}$$

En particulier avec $\varepsilon = 1$ on a

$$\int_\Omega |X_1| d\mathbb{P} < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n) < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) < +\infty.$$

Etape 2 :Sens direct.
Ici les X_n sont indépendantes, donc par le le lemme de Borel-Cantelli (qui devient des équivalences lorsque que l'on a indépendance[1]) :

$$\int_\Omega |X_1| d\mathbb{P} < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) < +\infty \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\limsup |X_n| > n) = 0$$

et

$$\int_\Omega |X_1| d\mathbb{P} = +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) = +\infty \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\limsup |X_n| > n) = 1.$$

Ainsi, on obtient à ce stade la première implication du théorème car par définition, $\left\{ \frac{X_n}{n} \to 0 \right\} \subset \left\{ \liminf \frac{|X_n|}{n} \leq 1 \right\}$ et donc par passage au complémentaire on obtient

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \to 0 \right) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\limsup \frac{|X_n|}{n} > 1 \right) = 0 \Longleftrightarrow \int_\Omega |X_1| d\mathbb{P} < +\infty.$$

Etape 3 : Sens réciproque.
Supposons que $\int_\Omega |X_1| d\mathbb{P} < +\infty$. On applique alors (2) : pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| > (n+1)\varepsilon) < +\infty$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > (n+1)\varepsilon) < +\infty.$$

Ainsi, par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup |X_n| > (n+1)\varepsilon) = 0.$$

En particulier, en appliquant cela pour des $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, on obtient par dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ et par σ-sous-

1. cela devient une alternative, c.f loi du $0-1$ de Kolmogorov + le fait que limsup A_n soit asymptotique

additivité

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*} \limsup |X_n| > (n+1)\varepsilon\right) = 0.$$

On remarque alors que, par définition de la convergence simple (presque partout), on a $\left\{\frac{X_n}{n} \to 0\right\} \supset \left\{\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*} \liminf |X_n| \leq (n+1)\varepsilon\right\}$. Ce dernier étant le complémentaire d'un événement de mesure nulle, il est de mesure pleine et donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \to 0\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*} \liminf |X_n| \leq (n+1)\varepsilon\right) = 1.$$

□

Références

[Ouv2] Jean-Yves Ouvrard, Probabilités 2, Cassini