Couplages et métaplans - agreg 2021

Vincent LOUATRON

Table des matières

1 Développements

1.1 Développements d'algèbre

1. Classification des formes quadratiques sur les corps finis [Per] p 130
2. Critère d'Eisenstein
3. Décomposition polaire - 105, 158 - [GouAl] p249
4. Décomposition de Dunford
5. Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$ - 101, 103, 190 - [NH2G22] p 66
6. Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ - [GouAl]
7. Générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$ - 108, 142, 120 (?) - [131D] p 14
8. Loi de réciprocité quadratique - 121, 123, 170 [H2G21]
9. Matrices de Gram [GouAl]
10. Polynômes cyclotomiques [Per]
11. Simplicité de $\mathscr{A}_n$ - [Per]
12. Images de l'exponentielle matricielle
13. Table de caractères de $\mathcal{S}_4$
14. Théorème faible de la progression arithmétique de Dirichlet
15. Théorème de Cayley-Hamilton
16. Théorème de Gauss-Lucas et applications
17. Théorème de structure des groupes abéliens finis
18. Théorème de Wedderburn - 101, 102, 103 - [Per] page 82

1.2 Développements d'analyse

1. Abel angulaire (Théorème d') et théorème taubérien faible
2. Aiguille de Buffon - 261, 262, 264 [131D]
3. Applications du lemme de Borel-Cantelli - 262, 266 - [Ouv2] p 81-83
4. Cauchy-Lipschitz global (Théorème de) - 203, 205, 220, 226 adapté - [Rou] p170
5. Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$
6. Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $C^k(\mathbb{R})$ (pour la norme CVU tout compact toute dérivée)
7. Equation de la chaleur - 222 [XENSAn4]
8. Féjér (théorème de) - 230, 241, 246 - [GouAn]
9. Formule des compléments - [AM] p249
10. Formule sommatoire de Poisson - 246
11. Fourier-Plancherel (Théorème de) - 207, 236, 250 - [131D] p 514
12. Liapunov (Théorème de stabilité de) - 220, 221 - [Rou] p135
13. Méthode de Newton - 223, 226 - [Rou] ou [Ave]
14. Optimisation dans un Hilbert - 219, 229, 253 [All]

15. Galton-Watson (Modèle de) - 229, 264, 266 - [PNP] p 195
16. Polynômes orthogonaux (Base hilbertienne de) - 209, 213, 234 -[ObA] pages 110 et 140
17. Prolongement de ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ via la formule sommatoire de Poisson - 207, 236, 239, (250), 245, 265 - [ZuQu] (chap II, III, p28-29) ou [131D] page 522.
18. Théorème de Riesz-Fischer - 234 [Bre] p57
19. Théorème de Lax-Milgram et résolution du problème de Sturm-Liouville - 222 [DiM]
20. Simulation de variables aléatoires [Ouv2]
21. Théorème de Weierstrass par la convolution - [GouAn] p57

1.3 Développements mixtes

1. Ellipsoïde de Loewner
2. Lemme de Morse - 158, 214, 215, 267 - [Rou] exo 114 p344 et exo 66 p201
3. LU et Choleksky
4. Méthodes itératives
5. Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$
6. Théorème des extrema liés (avec les sous-variétés) - 214, 215, 219 [Ave]

2 Métaplans d'algèbre

2.101 Groupe opérant sur un ensemble

25-05 Paul Maurer et Élie avec Félix Ulmer

Attention à bien définir les objets dont on se sert par la suite (en particulier le groupe affine dans ce plan là).

Questions :

1. Donner la représentation de dimension 3 de $\mathcal{S}_4$ donné par le groupe des isométries du tétraèdre. Le caractère est-il irréductible ? Donner les matrices de la représentation $\varphi : \mathcal{S}_4 \to GL_3(\mathbb{R})$ (il faut s'attendre à ces questions-là si on fait le développement sur les isométries du tétraèdre/cube).
2. Donner les classes de conjuguaison de $\mathcal{S}_4$.
3. Sur le théorème de Cayley (tout groupe est sous-groupe de groupe symétrique). Comment montrer à l'aide de ce théorème que un G d'ordre $2m$ avec $m > 1$ impair n'est pas simple ?
4. L'action par translation du groupe G sur les classes $Sym(G/H) = Sym(\{gh, g \in G\})$:

$$\alpha \mapsto \alpha G/H$$

n'est pas forcément fidèle. Dans le théorème de Cayley, le morphisme donne une représentation fidèle.

Réponses

1. $V = GL_3(\mathbb{R})$, représentation $\varphi : \mathcal{S}_4 \to GL_3(\mathbb{R})$. On a $\varphi(1) = 3$: représentation de degré 3. Table de caractères (tirée du développement associé) :

	id	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
χ_{triv}	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_H	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi_H$	3	-1	-1	0	1
χ_2	2	0	2	-1	0

Abélien ssi toutes rps de dimension 1. $\mathcal{S}_4/V_4$ est isomorphe à $\mathcal{S}_\ni$ donc les représentations de

2. Il y en a 5.
3. Cayley : il existe un morphisme $\varphi G \to \mathcal{S}_{2m}$. Un élément x d'ordre 2 est envoyé sur un produit de transpositions (en fait exactement m transpositions). Action est transitive.
   On compose par la signature : $\varphi \circ \varepsilon : G \to \{-1, 1\}$. Sous-groupe d'indice 2 : G pas simple.
4.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. Généralités sur les actions de groupes
   (a) Vocabulaire
   - Déf action de groupe par $G \times X$ sur X
   - Déf via morphisme $G \to \mathfrak{S}(X)$
   - Exemple de l'action par permutation sur $[\![1, n]\!]$
   - Déf orbites, stabilisateurs
   - Déf action libre, action transitive, n-transitive, fidèle

   (b) Relations de cardinaux et dénombrement
   - Relation orbite-stabilisateur
   - Equation aux classes
   - **Dénombrement des matrices diagonalisables de $\mathbb{F}_q$**
   - Formule de Burnside
2. Actions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}(\mathbb{K})$[1]
   (a) Action de GL_n sur $\mathcal{M}_n$
   - Action $P \cdot A := PAP^{-1}$
   - Classes de conjugaison $=$ matrices semblables
   - Stabilisateur $Stab(A) =$
   - Propriétés conservées : rang, polynôme caractéristique (donc det, trace, ...)

1. On peut aussi rajouter l'action à gauche avec le ivot de Gauss (c.f leçon 150) selon la place qu'il reste.

- Propriété $\mathbb{C}$-semblable ssi $\mathbb{R}$-semblable
- Interprétation comme un changement de base (changement de coordonnées donné par $X \to P^{-1}X$
- Application : action sur les matrices diagonalisables, triangulaires, nilpotentes.

(b) Action par congruence et formes quadratiques [dSP]

- **Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$**

3. Représentations linéaires de groupes
   - Déf représentation
   - Exemple représentation fidèle / par permutation
   - Déf caractère
   - Déf représentation irréductible
   - Carac via le caractère
   - Formule de Burnside pour les dimensions
   - Table de caractère et classes de conjugaison
   - Produit scalaire dans une table de caractère (colonnes/lignes orthogonales/orthonormées)
   - Table $\mathfrak{S}_4$

Ouverture possible : théorie des invariants. $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $g\dot{f}(X_1, \ldots, X_n) := f(g(X_1), \ldots, g(X_n))$: évaluation de polynômes. Opérateur de Reinhold. Cox-Little-O'Shea

Sur le plan : attention à ne pas s'éparpiller

2.102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

01-12 Diego Condori, Marine Péron encadrés par Matthieu Romagny

Questions :

1. Qu'est-ce qu'une fonction harmonique ? Quel est l'énoncé du théorème de la moyenne ? Pourquoi $ln(|f_1|)$ harmonique ?
2. Question posée de manière détournée mais essentiellement : Pourquoi $\displaystyle\sum_{i \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq d} 1 = \binom{d}{k}$?
3. Majoration "plus facile" pour $\binom{d}{k} \leq 2^{d-1}$?
4. Avec la mesure de Mahler, comment prendre en compte la racines de module plus petit que 1 ?
5. Sur le plan : Pourquoi le groupes de Torsion ? Utilité ?
6. $\langle \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3 \rangle =$? Fini ? Infini ?
7. Groupes de type fini de $\mathbb{U}$ et de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$?
8. (digression) C'est quoi $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})$?
9. Sur les angles orientés : quels sont les éléments de $\mathcal{A}$?
10. C'est quoi une orientation ?
11. Existe-t-il un morphisme de groupes racine carrée $\sqrt{(.)} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$?

Réponses

1. Harmonique ssi $\mathcal{C}^2$ et $\Delta f = 0$. Théorème de la moyenne : c.f Rudin p 280.
2. C'est précisément le cardinal de $\{i \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq d\}$ ("k choix parmi d éléments")
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} = 2^d$ et chaque terme de la somme étant un entier est plus petit que 2^{d-1}
4. $X^d f(\frac{1}{X})$: polynôme réciproque (coefficients dans l'ordre inverse), dont les racines sont les inverses des racines de f.
5. De manière générale : les éléments de torsion (ordre fini) permettent d'en apprendre un peu sur un produit. Par exemple $G = \mathbb{U} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Torsion d'un gropue abélien = partie discrète du groupe. (pas de topologie "continue"). Théorie des groupes finis pour étudier la torsion. Pour l'étudier en entier, on regarde la topologie pour voir la partie "continue", qui n'est pas de torsion. Ici, savoir que $Tor(\mathbb{U}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ permet de savoir rapidement par exemple les sous-groupes de type fini de $\mathbb{U}$, qui sont les $\langle \frac{1}{n} \rangle \simeq Z/n\mathbb{Z}$.
6. $\langle \mathbb{U}_n, \mathbb{U}_m \rangle = \mathbb{U}_{ppcm(n,m)}$.
7. De $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: ce sont les groupes cycliques
8. C'est $\mathbb{K}^\times$.
9. Attention, dans $\mathcal{A}$ il faut bien prendre des **couples** de vecteurs : $\mathcal{A} := \{u, v \in \mathbb{R}^2, ||u|| = 1\}$.
10. Une orientation est une classe d'équivalence de bases pour la relation $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ équivalentes si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$
11. Non. Si il en existait un, ce morphisme enverrait un élément d'ordre deux sur un élément d'ordre un ou deux, et pas d'ordre 4.

Le plan est bien et varié. Intro : repositionner $\mathbb{U}$ en algèbre, géométrie, analyse (Fourier) : **ne pas faire moins dans l'intro**. (en particulier présenter les parties au début)
Attention à être très précis pendant le développement : ne pas dire ω pour w, etc...

Métaplan

1. Généralités
   (a) Ensembles $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ et représentations de complexes
      - Représentation trigo d'un nombre complexe
      - Représentation exponentielle
      - Formules d'Euler, Moivre sur l'exponentielle imaginaire
      - Application : expression d'un chemin type "cercle" dans une intégrale curviligne (genre le contour pour la formule des compléments)

   (b) Géométrie, rotations
      - Expression complexe d'une rotation du plan
      - Calculs de distances
2. Propriétés algébriques
   (a) Propriétés de $\mathbb{U}$ et de ses sous-groupes

- Propriétés algébriques : groupe commutatif.
- Sous-groupes de $\mathbb{U}$: lui-même et les $\mathbb{U}_n$.

(b) Résolution d'équations à inconnue complexe

- Résolution de $z^n - 1$, $z^n - a$
- Résolution d'équations de degré deux et discriminant

(c) Racines primitives et cyclotomie

- **Théorème de Wedderburn**
- **Théorème faible de de Dirichlet**

3. Représentations $\mathbb{C}$-linéaires de groupes
   - Déf représentation
   - Exemple représentation fidèle / par permutation
   - Déf caractère
   - Déf représentation irréductible
   - Carac via le caractère
   - Cas abélien et diagonalisabilité : intervention des racines de l'unité
   - Application : **Théorème de structure des groupes abéliens**

2.103 Conjuguaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Rapport du jury 2020 : Notion de conjuguaison : groupes de petit cardinal, S_n, $GL(E)$, $GA(\mathscr{E})$, $O(q)$,... Parler de la simplification de problèmes via la conjuguaison (réduction de matrices par ex). On peut étudier les classes de conjugaison sur des exemples. On peut aussi insister sur des objets tels que h et $g^{-1}hg$ ont les mêmes propriétés (conjugaison d'une transvection, translation, réflexion,...)
Expliquer pourquoi $H \lhd G$ est important pour avoir G/H groupe. Théorème d'isomorphisme. Problèmes résolus en étudiant tantôt G tantôt G/H, sous-groupes de G/H.

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

La conjugaison occupe une place particulière parmi les actions de groupe. C'est une action symétrique, qui donne une relation d'équivalence, "être conjugué". Les exemples sont nombreux : relation de similitude et relation de congruence pour les matrices, type d'une permutation circulaire, ... En un sens, l'action par conjuguaison est un des outils en mathématiques qui permet de mettre un sens précis sur le fait de "se ressembler", et permet de regrouper les objets dans des "cases".
Quotienter par une relation d'équivalence issue d'une action par conjugaison est donc chose courante, et on appelle les sous-groupes stables par l'action de conjugaison des sous-groupes quotients.

Métaplan :
Cadre :

1. Vocabulaire sur la conjugaison et les groupes distingués
   (a) Action de groupe par conjuguaison
      - Définition action conjugaison, orbite, stabilisateurs (=classes de conjugaison et centralisateurs)
      - Propriétés de base : Stab sous-groupe, Orbites disjointes
      - Partition de X en orbites et équation aux classes
      - Relation orbite-stabilisateurs
      - Action par conjugaison d'un sous-groupe sur G

   DEV **Théorème de Wedderburn**

      - Application de l'équation aux classes au centre d'un p-groupe
   (b) Définitions
      - Définition distingué
      - Non transitivité : par exemple $\{id, (12)(34)\} \lhd V_4$ et $V_4 \lhd \mathcal{S}_4$ mais on n'a pas $\{id, (12)(34)\} \lhd \mathcal{S}_4$
      - Equivalence avec $gH = Hg$ et propriété G/H groupe
      - Exemple de G/H avec H non distingué qui ne soit pas un groupe
      - Groupe dérivé $D(G)$
      - Exemples de groupes dérivés :c.f Perrin p13
      - Centre
2. Résultats fondamentaux sur les groupes quotients
   - Def groupe quotient
   - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
   - Sous-groupes de $G/H \simeq$ sous-groupes de G contenant H
   - Caractérisation du produit direct
   - Théorème d'isomorphisme
   - Application au théorème du rang
   - Indice d'un groupe, cas indice $= 2$
   - Théorème de Sylow [Per] p18
   - Application groupe d'ordre 63 [Ulm] ou [Per]
3. Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ [Per]
   - p-cycles conjugués dans $\mathfrak{S}_n$
   - Définition type permutation
   - Permutation de même type ssi conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$
   - $\mathcal{A}_n$ agit $n-2$-transitivement sur $[\![1, n]\!]$

- (Corollaire) Tous les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$
- (Corollaire) $\mathcal{A}_n$ est simple

4. Application de la conjuguaison aux matrices
   (a) Conjuguaison et similitude
      - Propriétés conservées par la similitude : rang, polynômes remarquables, trace...
      - Changement de base

   DEV **Dénombrement des matrices diagonalisables de $\mathbb{F}_q$**

   (b) Cas particulier du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$
      - Générateurs : réflexions orthogonales (=symétries orthogonales sur une droite) pour O_n et renversements (= réflexions /à un plan) pour SO_n
      - Théorème spectral
5. Application aux représentations de groupes
   - $|Conj(G)| = Irr(G)$
   - Table de caractères + exemples

2.104 Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Montrez que si $m \wedge n = 1$ et x, y d'ordres m, n alors xy est d'ordre mn.
2. Quels sont les sous-groupes de ${}_4$?
3. Montrez que le centre d'un p-groupe est non trivial.
4. Calculez les cardinaux de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$, de $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)/\{\pm id\}$

Réponses

1. On montre que $mn \mid o(xy)$ et $o(xy) \mid mn$.
2. On a $|{}_4| = 12$. Les sous(groupes d'ordre 2 sont : ceux engendrés par les doubles transpositions. Les sous-groupes d'ordre 3 (les 3-Sylow) sont les
3. On considère l'action de G sur lui-même par conjugaison et on applique l'équation aux classes.
4. On a $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)| = (5^2-1)(5^2-5) = 24 \times 20 = 480$ et donc puisque $det : GL_2(\mathbb{F}_5) \to \mathbb{F}_5^\times$ est surjectif, $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)| = \dfrac{|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)|}{|\mathbb{F}_5^\times|} = 120$. Donc $|PSL_2(\mathbb{F}_5)| = 60$. C'est par ailleurs un groupe simple. En fait il est isomorphe à $\mathscr{A}_5$.

Métaplan :
Cadre :

1. Généralités sur les groupes finis
   (a) Définitions, système générateur [Ulm] chap 1 ou [Per] chap 1
      - Définition sous-groupe engendré, ordre, partie génératrice, groupe cyclique
      - Exemple du groupe Diédral

        - Théorème de Lagrange
    (b) Groupes cycliques, groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et propriétés [Per], [Goz]
        - (Tout groupe cyclique est abélien)
        - Tout groupe cyclique est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ex : racines de l'unité)
        - Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
        - Tout groupe G dont, pour $d \mid n$, les $x \in G$ tels que $x^d = 1$ [Goz]
        - Application : si K est un corps et $G \leq K^\times$ est fini alors G est cyclique. En particulier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$ est cyclique. (condition de cyclicité de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: c.f Rombaldi algèbre)
    (c) Groupes distingués, simplicité
        - Définition distingué
        - Exemple de groupe distingué
        - Définition groupe simple + exemple, contre-exemple groupe de Klein
        - Tout sous-groupe d'indice 2 est distingué
        - Théorème(s) de Sylow [Per]
2. Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$
    (a) Définitions, décomposition en cycles [TE1MPSI]
        - Définition, action $n-$transitive sur $[\![1, n]\!]$
        - Définition signature, exemple d'une permutation
        - Définition $\mathfrak{A}_n$
    (b) Générateurs de $\mathfrak{S}_n$, de $\mathfrak{A}_n$
        - Systèmes générateurs de $\mathfrak{S}_n$
        - $\mathfrak{A}_n$ engendré par les $3-$cycles
3. Représentations linéaires de groupes [Col]
    (a) Représentation linéaire et caractères
        - Définition représentation (ρ, V)
        - Exemple : action par permutation des coordonnées
        - Représentation irréductible, théorème de Maschke
        - Exemple de découpage d'une représentation avec l'action par permutation des coordonnées
        - Lien $|Conj(G)| = |Irr(G)|$
        - Produits scalaires et tables de caractères
        - Formule de Burnside (pour les représentations)
        - **Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$**
    (b) Représentations des groupes abéliens
        - (Codiagonalisabilité des représentations)
        - Représentations irréductibles = droites
        - Définition du dual $\widehat{G}$ dans le cas abélien
        - Isomorphisme d'évaluation $ev : G \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{G}}$
        - **Théorème de structure des groupes abéliens finis**

2.105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

2.106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

Le groupe linéaire est le groupe des inversibles des endomorphismes. C'est à la fois un objet algébrique intéressant car il agit de plusieurs manières différentes (applications à la réduction, à la classification des matrices et des formes quadratiques, aux changements de bases...), et aussi un objet analytique intéressant car possédant des propriétés topologiques remarquables telles que la densité dans $\mathcal{L}(E)$.

Métaplan :
Cadre : E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sauf mention contraire.

1. Description et premières propriétés algébriques
   (a) Définition et partie génératrice
      - Déf $\mathrm{GL}(E)$ et isomorphisme non canonique avec $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
      - Multiplicativité du det : compatibilité avec la loi de groupe
      - Centre = homothéties non nulles
      - Conjugaison de transvections c.f [Per] p98
      - Conjugaison de dilatations
      - Générateurs : transvections et dilatations
   (b) Sous-groupes [Per]
      - Déf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$
      - $D(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = D(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$ sauf cas particuliers [Per]
      - Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$

   DEV **Dénombrement des matrices diagonalisables de $\mathbb{F}_q$** [NH2G22]
   (c) Matrices de permutation [ObA] p187
      - $\sigma \mapsto P_\sigma$
      - Compatibilité avec la composition, la conjugaison
      - $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$
2. Actions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et actions sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   (a) Action par translation à gauche [H2G21]
      - Action $P \cdot A := PA$
      - Orbites = Même noyau
      - $Stab(A) = \{I_n\}$: action libre
      - Partition en orbites via la forme échelonnée : $\mathcal{M}_{n,p} = \bigcup_{M \in \mathscr{E}_{n,p}} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cdot M$
   (b) Action par conjugaison [H2G21]
      - Action $P \cdot A := PAP^{-1}$
      - Classes de conjugaison = matrices semblables
      - Stabilisateur $Stab(A) =$
      - Propriétés conservées : rang, polynôme caractéristique (donc det, trace, ...)
      - Propriété $\mathbb{C}$-semblable ssi $\mathbb{R}$-semblable
      - Interprétation comme un changement de base (changement de coordonnées donné par $X \to P^{-1}X$
      - Application : action sur les matrices diagonalisables, triangulaires, nilpotentes.
   (c) Représentations de groupes [Col]
      - Definition vue comme action "linéaire" de G sur V et comme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$
      - Exemple : représentation par permutations de coordonnées de $\mathfrak{S}_n$
      - Décomposition de cette représentation en χ_{triv} et χ_H

3. Propriétés topologiques dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ [MnTi]
   (a) Densité et applications
      - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, contre-exemple pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
      - Application : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
   (b) Connexité
      - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe
      - Corollaire : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices semblables à une $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée est connexe.
      - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes : $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$
   (c) Compacité

   DEV **Décomposition polaire** [GouAl] p249
      - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
      - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{R})$
      - $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un cône convexe
      - $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{R})$ sont compacts

2.107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Métaplan :
Cadre :

1. Représentations d'un groupe fini
   (a) Représentations et irréductibilité
   (b) Morphismes de représentations
2. Caractères de représentations
   (a) Caractères et algèbre $\mathbb{C}[G]$
   (b) Tables de caractères
      - **Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$**
3. Le cas abélien
   - **Théorème de strucure des groupes abéliens finis**

2.108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Rapport du jury 2020 :
Leçon 06/01 : Louis Noizet et Sylvain Procope-Mamert avec Matthieu Romagny
Questions :

1. Pour $n = 1$?
2. C'est quoi une matrice de transvection ? Est-ce que les matrices de transvections engendrent SL_n ?
3. Commentaires sur la proposition 16 (G abélien est cyclique ssi ...)
4. Pour $(\mathbb{Q}, +)$, donner une partie génératrice. Donner une partie minimale de générateurs. Même question pour $(\mathbb{Q}^\times, \times)$. Une idée de la structure exacte de $(\mathbb{Q}_+^\times, \times)$ (un groupe "simple" auquel il est isomorphe) ?
5. Théorème 30 de structure : unicité des d_i ? Y a-t-il une recette pour trouver n et les d_i ? Quel propriété possède d_p le dernier entier d_i ?
6. Cardinaux : $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$
7. Montrer que $\mathcal{S}_4$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ ne sont pas isomorphes.
8. Topologie : Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si U ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, a-t-on U partie génératrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$? Indice : on peut réaliser tout élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ comme produit de deux éléments de $U \cup U^{-1}$. =>Ensemble des matrices à valeurs propres toutes distinctes : ouvert dense, on peut appliquer cela.

Réponses

1. Une transvection est différente de l'identité. Donc il faut faire attention à la définition avec "hyperplan de points fixes".
2. Réponse attendue : il y a + de transvections que de matrices de transvections (forme "réduite"). Les matrices de transvections engendrent SL_n (pivot de Gauss).
3. Application de ceci : si K corps, tout sous-groupe de $K^\times$ est cyclique.
4. $\{\frac{1}{p}, p \text{ premier}\}$.
   Pour multiplicatif : $\{p, p \text{ premier}\} \cup \{-1\}$.
   Isomorphe à $\mathbb{Z}^{(\mathcal{P})} = \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbb{Z}$ via $u_p \mapsto \prod_p p^{u_p} \in \mathbb{Q}_+^\times$: c'est la décomposition en facteurs premiers.
5. Oui car on a la condition $d_1 | \dots | d_p$.
   On regarde le plus grand sous-groupe qui contient les éléments d'ordre infini ? Non : il n'y en a pas qu'un seul. Le premier morceau (non torsion) en $\mathbb{Z}^n$ n'est pas canonique. Pour trouver n on regarde G/T avec T le sous-groupe de torsion. L'entier d_i est le plus grand ordre possible pour les éléments d'un groupe.
6. $|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)| = (3^2 - 1) * (3^2 - 3) = 48$ et $|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)| = 24$.
7. Montrons que $\mathrm{SL}\,2(\mathbb{F}_3)$ ne possède pas de morphisme non trivial dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, contrairement à la signature pour $\mathcal{S}_4$. Soit $\phi : \mathrm{SL}\,2(\mathbb{F}_3) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ un morphisme. On remarque que les transvections, qui engendrent $\mathrm{SL}\,2(\mathbb{F}_3)$, sont d'ordre 3. Donc $x = x^4$.
8. Soit $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrons que XU est dense : on a XU image par l'application qui est en fait un homéomorphisme "multiplication par X" de l'ouvert U. De plus XU rencontre U^{-1}. En effet U^{-1} est par le même argument un ouvert dense. Or toute partie dense rencontre tout ouvert non vide, donc $XU \cap U^{-1} \neq \emptyset$.
   Ainsi, il existe $XM = N$ avec $M \in U$ et $N^{-1} \in U$. Donc $X = M^{-1}N \in \langle U \rangle$.

Autres remarques : A retenir : $T_{i,j}(\lambda) + T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda + \mu)$
Sur le plan : petit déséquilibre entre les tailles des parties, mais pas très grave. Thèmes pour II et III : intéressant. Façon de ranger avec les propriétés des parties génératrices : propriétés de taille, propriétés géométriques.
On peut compter avec la relation orbite-stabilisateurs et la prop "toutes transvections sont conjuguées/similaires", et l'action de GL_n le nombre de transvections de $GL_n(\mathbb{F}_q)$.
Questions bonus : Références pour le lien coniques et points critiques

démontrez que si L est le corps des fractions rationnelles en T à coefficients dans $\mathbb{F}_3$ (corps fini à 3 éléments), dit autrement $L = Frac(\mathbb{F}_3[T])$, alors L* est isomorphe à $\mathbb{Q}^*$. Cela donne un exemple de deux corps K et L qui ne sont pas isomorphes (comme corps) mais ont des groupes multiplicatifs K* et L* isomorphes (comme groupes). 2) combien y a-t-il de transvections dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$? (Indice : elles sont toutes conjuguées !)

Motivations

Obtenir un système générateur d'un groupe en théorie des groupes, c'est comme obtenir une base en algèbre linéaire. En effet, beaucoup de propriétés d'un groupe se voient sur ses générateurs. En particulier, les sous-groupes d'un groupe fini dont on connaît un système générateur sont exprimables à partir de ce système (on peut penser aux sous-groupes de $\mathbb{D}_n = \langle r, s\rangle$ qui sont $\langle r\rangle$ et les $\langle s^d\rangle$, $d \leq n$). Il n'est pas toujours aisé de trouver un système générateur, même pour des groupes cycliques comme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Métaplan :

1. Notions de base
   (a) Définitions, système générateur [Ulm] chap 1 ou [Per] chap 1
      - Définition sous-groupe engendré, ordre, partie génératrice, groupe cyclique
      - Exemple du groupe Diédral
      - Théorème de Lagrange

   (b) Groupes cycliques, groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et propriétés [Per], [Goz]
      - (Tout groupe cyclique est abélien)
      - Tout groupe cyclique est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ex : racines de l'unité)
      - Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
      - Tout groupe G dont, pour $d \mid n$, les $x \in G$ tels que $x^d = 1$ [Goz]
      - Application : si K est un corps et $G \leq K^\times$ est fini alors G est cyclique. En particulier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$ est cyclique. (condition de cyclicité de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: c.f Rombaldi algèbre)

2. Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$
   (a) Définitions, décomposition en cycles [TE1MPSI]
      - Définition, action $n-$transitive sur $[\![1, n]\!]$
      - Définition signature, exemple d'une permutation
      - Définition $\mathfrak{A}_n$

(b) Générateurs de $\mathfrak{S}_n$, de $\mathfrak{A}_n$
   - Systèmes générateurs de $\mathfrak{S}_n$
   - $\mathfrak{A}_n$ engendré par les $3-$cycles
3. Groupe linéaire et sous-groupes
   (a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$
   - GL engendré par les transvections et les dilatations, SL juste par les transvections.
   - Transvections conjuguées dans GL et dans SL pour $n \geq 3$.
   - **Générateurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et relèvement d'une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$**

   (b) $O_n(\mathbb{R}), SO_n(\mathbb{R})$ [Per]
   - O_n est engendré par les réflexions orthogonales (1 partout sur la diagonale sauf un coefficient égal à -1)
   - SO_n est engendré par les retournements

2.120 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Soit K corps et $G < K^*$ d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in G$ d'ordre d. Montrez que G contient exactement d'éléments dont l'ordre divise d.
   Soit $d \mid n$. On voudrait compter le nombre d'éléments de G d'ordre d.
2. Est-ce que $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$ est cyclique ?
3. Des questions perchées sur Frobenius-Zolotarev (du genre "c'est quoi la signature du Frobenius ?")

Réponses

1. On considère le sous-groupe $H :=< x >$: lui contient d'après le théorème de Lagrange d éléments d'ordre divisant d. Mais d'autre part, si l'ordre de y divise d alors $y^d = 1$. En particulier puisque $K[X]$ est intègre, y est une racine de $X^d - 1$ qui sont au nombre de d au plus. Donc il y a au plus d éléments d'ordre divisant d. En particulier parmi les éléments du groupe cyclique $< x > \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, il y a $\varphi(d)$ éléments d'ordre exactement d.
   Notons $N(d)$ le nombre d'éléments d'ordre d. On a $|G| = \sum_{d|n} N(d) = n = \sum_{\varphi(d)}$. Dμμonc $N(d) = \varphi(n)$
2. On a $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{-3, -1, 1, 3\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ qui n'est pas cyclique.
   On a un morphisme $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^* \to \{\pm 1\}$ en prenant la classe modulo 4.
   Indication : montrez que $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^* \simeq K \times \{\pm 1\}$.
   On peut considérer $(x, \pm 1) \mapsto \pm x \in (\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$.
   (non fini)

Motivations

La notion de reste dans une division euclidienne, qui est à l'origine de la création des structures $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est une notion rencontrée dès la primaire. On rencontre en fait $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ dès que l'on apprend à lire l'heure. L'idée de cyclicité apparaît naturellement dans la vie de tous les jours, et la notion de groupe cyclique formalise cette idée.

Métaplan :
Cadre :

1. Groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
   (a) Construction
      - Idéaux de $\mathbb{Z}$
      - Groupes cycliques = isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
      - Cyclicité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$ + contre-exemple $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
   (b) Premières applications
      - Théorème de structure des groupes abéliens finis
      - **Générateurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et relèvement d'une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$**
2. Anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$
   (a) Inversibles
      - Petit théorème de Fermat
      - Indicatrice d'Euler
      - Lien racines primitives
   (b) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier
      - Cyclicité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$ + contre-exemple $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
3. Applications à la résolution d'équations
   (a) Systèmes de congruences et théorème chinois [Ulm]
      - Théorème des restes chinois (équivalence)
      - Application à la résolution d'équations diophantiennes [TE1MP]
   (b) Réduction modulo p
      - Critère d'Eisenstein (en pratique : on réduit modulo p pour voir si les conditions sont vérifiées)
      - Critère d'irréductibilité par réduction modulo p [Per] p77
4. Formes quadratiques sur $\mathbb{F}_p$
   (a) Carrés de $\mathbb{F}_p^\times$ [Per]
      -
   (b) Loi de réciprocité quadratique et applications
      -

2.121 Nombres premiers. Applications

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Est-ce que $\mathbb{Z}/M_q\mathbb{Z}$ est un corps ?
2. Est-ce qu'il y a des $M_q = 2^q - 1$ tels que p premier soit un carré modulo M_q ? Indication : on peut utiliser le symbole de Jacobi.
3. Autres façons de montrer que $M_q \equiv 7[12]$ que par récurrence ?
4. Soit L extension de degré 2 de $\mathbb{F}_p$ avec $p > 2$. Soit $x \in L \setminus \mathbb{F}_p$. Pourquoi le Frobenius est-il un morphisme ? Pouvez-vous factoriser $P = \pi_x$ sur $\mathbb{F}_p$? (question guidée)
5. Vous connaissez les nombres de Fermat ? Pourquoi $2^{2^n} + 1$? Montrer que si $F_n = 2^{2^n} + 1$ est un nombre de Fermat premier, alors $3^{(F_n-1)/2} - 1 \equiv -1[F_n]$. Montrer la réciproque. (c'est l'ancêtre du développement sur les nombres de Mersenne)
6. Quand est-ce que $2^n + 1$ est un carré ?

Réponses

1. Pas nécessairement.
2. En fait, la relation réciprocité quadratique reste valable pour les symboles de Jacobi.
3. Travailler modulo 3 et modulo 4 + théorème chinois. $M_q \equiv 1[3]$ et $M_q \equiv = 1[4]$
4. Soit P le polynôme minimal de x. On a $\deg(P) = 2$. Le Frobenius $\varphi : y \mapsto y^p$ est un automorphisme (car morphisme injectif) de $\mathbb{F}_p$ par le binôme de Newton. On a $P(\varphi(x)) = 0$ car φ morphisme de corps. Les points fixes du Frobenius sont les racines $p-1$-ièmes de l'unité et 0. Si $a \in \mathbb{F}_p$, par Fermat on a $a^p = a$ donc $P = (X - x)(X - \varphi(x))$. Donc nécessairement $L = \mathbb{F}_q[\sqrt(d)]$ avec d non carré dans $\mathbb{F}_p$. On a $x = a + b\sqrt{a}$. Mais la conjugaison est un automorphisme du corps L. En effet on a $(X - x)(X - \bar{x}) = X^2 - (x + \bar{x} + x\bar{x} \in \mathbb{F}_p[X]$ donc $\varphi(x) = x^p = \bar{x}$. En fait on a seulement 2 automorphismes de corps de L dans L : id et la conjuguaison. Ainsi, dans la partie du développement où on introduit ρ et $r\bar{h}o$, on peut gagner du temps.
5. On a $\left(\dfrac{3}{F_n}\right) = 3^{(F_n-1)/2}$. On a $3 \notin F_n^{\times 2}$ donc par LRQ, $\left(\dfrac{F_n}{3}\right) = \left(\dfrac{3}{F_n}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right) = 1$.
   Réciproquement si $3^{(F_n-1)/2} - 1 \equiv -1[F_n]$, l'ordre de 3 dans $\mathbb{Z}/F_n\mathbb{Z}$ est $F_n - 1$; Or $\varphi(F_n) \leq F_n - 1$ et $o(3)|\varphi(F_n)$ donc $\varphi(F_n) = F_n - 1$ et donc F_n est premier.
6. Si $x^2 = 2^n+1$ alors $(x-1)(x+1) = 2^n$ et donc $x+1 = 2^k$ et $x-1 = 2^{n-k}$. On a alors $2^{k-1} = 2^{n-k-1}+1$. On en conclut que nécessairement $n = 3$. Réciproquement $8 + 1 = 9 = 3^2$.

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

Remarques : Plan très complet. Le seul problème : il n'y aura sûrement pas le temps de faire autant. Théorème de Dirichlet : on peut en parler car on est censé connaître pour la culture ce genre de résultats. Il n'est pas envisageable de parler de la preuve analyse complexe dans cette leçon. Dans le plan : ça surprend de présenter ζ avant Dirichlet.
Application de Dirichlet faible : un nombre n est premier ssi il est premier modulo tout p premier.
Partie "application" : pas élégant.
Développement : un peu long.

2.122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

2.123 Corps Finis. Applications

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 13/01 Léo Daures et Martin Jalard avec Lionel Fourquaux
Dév proposés : LRQ, Dénombrement des polynômes irréductibles

Questions

1. LRQ : p et q impairs ?
2. Que peut-on dire du polynôme $P = \sum_{k=0}^{q-1}$ sur $\mathbb{F}_p[X]$?
3. Quels sont les sous-corps de $\mathbb{F}_{1024}$?

4. Soit la suite $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2$ et $u_{n+1} = u_{n-1} + u_{n-2}$. Premiers termes : $3, 0, 2, 3, 2, 5 = u_5, 5, 7 = u_7, 10, 12, 17, 22 = u_{11}, \ldots$. Montrer que p divise u_p pour p premier.

Autres questions possible : montrer qu'un polynôme sur $\mathbb{F}_p[X]$ a ses racines permutées par le Frobenius. On peut aussi demander des calculs de symboles de Legendre/Jacobi. On peut demander une factorisation de polynômes par exemple montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$. (inversion de Möbius pour compter les irréductibles)

Réponses

1. Oui. p et q pairs $=$ loi annexe.
2. C'est le q-ième polynôme cyclotomique. Il donc irréductible sur $\mathbb{Z}$, mais pas nécessairement sur $\mathbb{F}_p$.
3. Première réponse : $1024 = 2^{10}$ donc il y a $\mathbb{F}_{2^d}$ avec $d|10$: $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_{32}, \mathbb{F}_{1024}$. Mais ce sont les sous-corps à isomorphismes près.
   Si on prend un P irréductible de degré 5, on peut voir $\mathbb{F}_{32}$ comme $\mathbb{F}_2[X]/(P)$. Ou sinon on peut considérer le sous-corps $\{\text{racines de } X^{32} - X\}$ de $\mathbb{F}_{1024}$ (point fixe du Frobenius donc sous-corps).
4. On a une suite récurrente linéaire. On peut exprimer les choses matriciellement (matrice compagnon). Polynôme caractéristique : $X^3 - X - 1$. On note $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{F}_p}$ les racines. Si les racines sont distinctes alors $u_n = a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n$. En fait on peut montrer que c'est vrai dans $\mathbb{F}_p$ même si les racines ne sont pas distinctes, et que $a = b = c = 1$.
   On a $u_{n+1} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots$ mais $\alpha^3 = \alpha + 1$ donc on a bien $u_{n+1} = \alpha^{n+1} +$ idem β, γ. Initialisation : relations coefficients-racines appliquées à $X^3 - X - 1$. On obtient : degré 0 : $\alpha\beta\gamma = 1$, dégré 1 : $\alpha + \beta + \gamma = 0$ dégré 2 : produits doubles $= -1$. En particulier en passant au Frobenius $\alpha^p + \beta^p + \gamma^p = (\alpha + \beta + \gamma)^p = 0$.
   On a $u_0 = 3$, $u_1 = 0 = \alpha + \beta + \gamma$ et $u_2 == \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, en effet $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \gamma\beta + \alpha\gamma)$ i.e $0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2$.

Motivations

Les corps sont une structure fondamentale en mathématiques, qui est à la base du concept d'espace vectoriel, qui a de nombreuses applications : algèbre linéaire théorique, espaces vectoriels utiles en analyse (Banach, Hilbert, ...), etc. Cependant les corps finis requièrent parfois une attention particulière, car contrairement à leurs homologues de caractéristique nulle, on peut avoir $n.x = 0$ dans un corps fini. Les raisonnements faisant intervenir une division peuvent ainsi tomber en défaut dans ces corps. (exemple : formule de polarisation en caractéristique 2).
En tant que tels, les corps finis possèdent de nombreuses applications, comme par exemple les codes correcteurs. On pourra aussi citer la théorie de Galois, à l'origine du célèbre théorème du même nom portant sur la résolution par radicaux d'équations polynômiales de degré 5 et plus.
Il apparaît donc intéressant d'étudier ces corps finis, leurs extensions, les problèmes de dénombrement associés, ...

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •

(b) •

3. (a) •

   (b) •

Rq sur le plan : Tout "corps" est considéré "commutatif". Item 36 : Théorème de Dirichlet **faible** (avec 4k+1). Mais il est concevable que le jury demande l'énoncé, et la méthode de démonstration (analyse complexe) du théorème de Dirichlet fort (Serre, cours d'arithmétique).
Le plan est très bien. Il est possible de parler de factorisations de polynômes (Berlekamp, etc). Géométrie : plans projectifs finis. Table de multiplication de $\mathbb{F}_8$: bien. Exemple 27 : exercice qui mérite d'être bien compris.

2.125 Extensions de corps. Applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 06/04 - Soobin Lee avec Lionel Fourquaux
Développements proposés : extension algébrique des nombres algébriques (Gozard, Szpirglas) et irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
Questions

1. Justifiez le résultat : "si a algébrique, alors $k(a) = k[a]$". Rappelez la définition de $k(a)$.
2. Y a-t-il une différence entre $vect(a^i b^j)$ et $k[a, b]$?
3. Quel est le lien entre $\mathbb{Q}[a]$ et $\mathbb{Q}[a, b]$? L'extension est-elle algébrique ? Quel est son degré ?
4. On a montré que la somme d'algébriques est algébrique. Quel est un polynôme annulateur ? Indication : résultant. Autre outil possible : bases de Gröbner.
5. Soient $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Quel est le degré de $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}]$ sur $\mathbb{Q}$?
6. Peut-on imaginer deux extension de degrés 2 dont $\mathbb{Q}[a, b]$ reste de degré deux ?
7. Existe-il des extensions de degré 3 de $\mathbb{R}$?
8. Que pensez-vous d'un anneau intègre fini ?
9. Soit $a \in K$ algébrique. Les racines de Π_a sont-elles dans $K[a]$?
10. Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Soient $a \in k$ et $P(X) := X^p - X - a$. Montrer que ou bien P est scindé à racines simples, ou bien P est irréductible. Indication : montrer que si P a une racine dans k alors on est dans le premier cas. Que se passe-t-il si on change l'énoncé en prenant $a \in L$ une extension de k ?

Réponses

1. Si k'/k est une extension de corps et $a \in k'$ alors $k(a)$ est le plus petit sous-corps de k' contenant a. Plus précisément, $k(a) = \left\{ \dfrac{P(a)}{Q(a)}, P, Q \in K[X], Q(a) \neq 0 \right\}$ et $k[a] = \{P(a), P \in K[X]\}$ est le sous-anneau de L engendré par a. Il faut donc montrer que $k[a]$ est un corps contenu dans $k(a)$.
   Pour cela une solution est de considérer $mult_x : y \in k[a] \mapsto yx \in k[a]$, de montrer qu'elle est injective et donc surjective : l'inverse de 1 est l'inverse de x et cela montre que $k[a]$ est un corps.
2. Oui : la seconde est une algèbre.
3. $\mathbb{Q}[a, b] = (\mathbb{Q}[a])[b]$. Elle est algébrique car finie. Le théorème de la base télescopique dit que $\deg_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[a, b]) = \deg(\mathbb{Q}[a]) \deg(\mathbb{Q}[b]) = \deg(\pi_a) \deg(\pi_b)$

4. Soient P et Q dans $k[X]$ annulant a et b respectivement. Equation : $P(X) = 0$ et $Q(T - X) = 0$. On élimine X entre les deux (la première solution a $X = a$ pour solution et donc si $X = a$ alors une solution de la 2e equation est b). Pour cela, on considère $Res_X(P, Q)$.
5. A priori, on sait que le degré de cette extension est un multiple de $ppcm(2, 3) = 6$. On sait que $\sqrt{3}$ est annulé par $X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][X]$. De plus aucun polynôme de degré 1 dans $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][X]$ n'annule $\sqrt{3}$ donc on a trouvé le polynôme minimal. Donc par multiplicativité des degré pour les extensions successives (th base télescopique), on a le résultat.
6. Oui, si on prend la même extension.
7. On remarque tout d'abord que, si une telle extension $L/\mathbb{R}$ existait, alors tous les polynômes minimaux des $a \in L$ (qui existent bien car L finie donc algébrique) seraient de degré $d \mid 3$ d'après le théorème de la base téléscopique (on a la tour d'extension$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(a) \subset L$). Or il n'existe pas de polynôme irréductible de degré 3 sur $\mathbb{R}$, donc tous les éléments de L seraient de degré 1, et donc $L = \mathbb{R}$, ce qui est absurde. [2]
8. C'est un corps. Soir $x \in A$. On considère $mult_x : y \in A \mapsto yx \in A$. C'est injectif et donc surjectif, et donc x a un inverse.
9. Soit $R = \{\text{racines de } \Pi_a\}$.
10. Soit α une racine de P. On a $\alpha^p - \alpha - a = 0$. On a, puisque le morphisme de Frobenius est un morhpisme en caractéristique p, $P(\alpha + n) = P(\alpha) = 0$ pour tout entier n et en particulier pour $n \in [\![0, p-1]\!]$. On a trouvé p racines distinctes : P est scindé à racines simples.
    Si $a \in L$, alors le même raisonnement montre que P sera scindé à racines simples sur L.
    On suppose maintenant que P est sans racines. Soit Q un facteur irréductible de P. Soit $L = k[X]/ < Q >$ un corps de rupture de Q sur k. Alors L contient une racine de P. Soit $\alpha \in L$ une racine de $\mathbb{Q}$. Montrer que $u := tr_{L/k}(\alpha) - \deg(Q)\alpha$ est dans $\mathbb{F}_p$. On a $u = \left(\sum_{i \in I \subset [\![0,p-1]\!], |I| = deg(\alpha)} \alpha + i \right) - \deg(Q)\alpha = \deg(Q)\alpha + \sum_{i \in I} i - \deg(Q)\alpha - \sum_{i \in I} i$. Or la somme des racines d'un polynôme est dans le corps de base de ce polynôme. Donc $\deg_k(Q) \equiv 0[p]$ et donc Q constant et donc P irréductible.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

2. Plus généralement, si L/K est finie de degré n, on peut trouver un élément de degré n. En effet,

Autres remarques : Choses non mises dans le plan : nombrtes constructibles, théorie de Galois.
Bien préciser les résultats que l'on admet.
Remarques sur le plan : très fourni, impossible à faire le jour de l'oral mais c'est un très bon exemple. Ce qye l'on peut enlever : un peu dans chaque partie. On peut faire un choix entre extensions cyclotomiques et quadratiques aussi.
Sur le développement : premier est très bien, second un peu à cheval avec la leçon sur les irréductibles rentre bien aussi dans le thème. Pour le premier développement, on peut agrémenter de la proposition 33.5 si on a trop de temps.
Le lien entre $k[a]$ et $k(a)$ doit être maîtrisé. Pour le résultant, c'est bien de maîtriser car c'est un peu la seule manière de répondre à la question 4. La question 10 commence à être d'un niveau assez sophistiqué, sûrement plus dur que ce qu'on aura comme question le jour J.

2.126 Exemples d'équations en arithmétique.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

2.141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

2.142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Questions :

1. Donner un exemple d'élément premier non irréductible
2. Donner un exemple d'anneau intègre non factoriel
3. Vous êtes sûrs de l'équivalence de Bézout ?
4. Algo (récursif) pour calculer PGCD de deux polynômes ?
5. Coût de cet algo ? Celui d'Euclide ?
6. Qu'est-ce qui se passe si on fait tourner l'algo d'Euclide dans $\mathbb{C}$ pour chercher le PGCD de deux polnômes de $\mathbb{R}$?
7. Soient d et m deux entiers naturels. À quelle(s) condition(s) existe-t-il deux entiers a, b tels que $d = pgcd(a, b)$ et $m = ppcm(a, b)$?
8. (suite) Supposons d|m. Peut-on décrire tous les couples solutions (a,b) ? Les compter ? Indic : si d=pgcd(a,b), on peut écrire a=da' et b=db' avec pgcd(a',b')=1.
9. Si on se donne n, quel est l'ensemble des décompositions n=uv avec u,v premiers entre eux ?
10. combien y a-t-il de cubes dans Z/nZ ?

Réponses :

1. dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, 3 n'est pas irréductible mais est premier :
   Si N(3) = 9 = N(ab) = N(a)N(b) alors on montre que a ou b est irréductible.
2. $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. (factoriel implique "premier" ssi "irréductible)
3. non, sauf si $d = 1$. Contre-exemple : $3 \times 2 + 2 \times (-2) = 2$ mais $pgcd(3, 2) \neq 2$
4. On peut faire une descente/remontée d'Euclide, ou bien en récursif : avec un bon λ, chercher le PGCD de $A - \lambda B$.
5. De l'ordre au plus n^2 avec n taille entiers (en fait $O(n \log(n))$). Pour Euclide : $O(n^2)$.
6. La div euclidienne ne dépend pas du corps de base ! On obtient à chaque étape des polynômes à coefficients réels. Idem pour les PPCM aussi.

7. c.f prop 13 avec l'expression des PPCM/PGCD en fonction de la DFP.
8. Pour fabriquer d'autres que la solution évidente $a = b$, $m = b$ bijection avec les écritures $\{u, v, \frac{m}{d} = uv, pgcd(u, v) = 1\}$
9. L'ensemble des déc $n = uv$ avec u, v premiers entre eux est 2^k solutions.
10. Pas faite, juste évoquée.

Il est tout à fait approprié de parler de PGCD pas juste dans les anneaux euclidiens. Mais le coeur de la leçon c'est la partie algo. (pour la présentation du plan, passer plus de temps sur cette partie algo)
Applications : c.f liste Matthieu Romagny

2.144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Est-ce que l'isomorphisme entre les corps de ruptures est canonique ?
2. Donnez un contre-exemple au théorème "en caractéristique nulle, A nilpotente ssi $\forall k$, $Tr(A^k) = 0$".
3. Expliquez l'application 13.
4. Expliquez l'application 5 (Lagrange).
5. Expliquez la proposition 39. En particulier que se passe-t-il si l'on ne borne pas le degré ? (quelle norme ?)
6. Donnez l'idée de la preuve de d'Alembert-Gauss. (item 19, appli du th 16)
7. Si P irréductible dans $\mathbb{K}$, il est scindé dans $\overline{\mathbb{K}}$. Est-ce qu'il est scindé à racines simples dans $\overline{\mathbb{K}}$? Indication : utiliser le critère avec la dérivée.

Réponses

1. Pour $X^2 + 1$, il y a par exemple plusieurs choix, à priori non canoniques : image de X peut être i ou $-i$.
2. I_2 est de trace nulle en caractéristique 2 mais
3. On utilise les relations coefficients-racines sur $P = X^3 aX^2 + bX + c = (X - x)(X - y)(X - z)$.
4. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \to (P(x_0), \dots, P(x_n)) \in \mathbb{R}^n$. On montre que c'est un iso en montrant qu'elle est injective ($n + 1$ racines en degré n).
5. Avec la norme sup des coefficients, $P_n = \frac{1}{n}X^2 + X \to X$ qui n'a que 0 comme racine (l'autre racine par à l'infini).
6. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(P) = 2^n q$ avec q impair. On a P scindé. On considère $Q = \prod_{i<j}(X - xi_+ x_j + 2x_i x_j)$. On a en fait $Q \in \mathbb{R}[X]$ par le théorème 16. (c.f preuve Gourdon).
7. En caractéristique nulle, P est scindé à racines simples ssi il est premier avec P', ssi ils n'ont pas de racines en commun (dans le cas de $\overline{\mathbb{K}}$). En caractéristique non nulle, on n'a pas ce critère. Contre-exemple dans $\mathbb{K}$ de caractéristique p : $P := X^p - a$ avec a tel que P irréductible (il suffit de prendre $p \mid a$ et $p \nmid a^2$). Soit $b \in \overline{\mathbb{K}}$ tel que $b^p = a$. On a $X^p - a = (X - b)^p$ est scindé à racines non simples

et irréductible sur le corps de départ $\mathbb{K}$.
En caractéristique nulle, on montre que P irréductible implique P scindé à racines simples sur la clôture algébrique. En effet, le PGCD est invariant par extension de corps, donc on peut appliquer une division euclidienne et en déduire par irréductibilité de P que $P \wedge P'$

Métaplan :

Motivations

J'ai envie de parler avant tout du lien entre coefficients d'un polynôme et ses racines, l'exemple le plus emblématique étant $X^2 - sX + p$ et la diagonalisation "de tête" de matrices 2x2. J'ai aussi envie de parler de l'importance de la manière dont sont distribuées les racines : localisation de valeurs propres et Gerschgörin, algorithmes de recherche (Newton), Gauss-Lucas. Eventuellement de Lagrange et d'approximation de polynômes par des polynômes orthogonaux (Tchebychev). Une application intéressante du théorème sur les polynômes élémentaires est le théorème de d'Alembert-Gauss.

Cadre :

1. Généralités sur les racines de polynômes
   (a) Racines et factorisation
      - Définition racine, définition multiplicité
      - Forme factorisée polynôme, déf de polynôme scindé
      - Polynôme scindé à racines simples
      - Nombre max de racines en fonction du degré
      - Théorème de Rolle
      - **Théorème de Gauss-Lucas et applications**
      - Interpolation de Lagrange
   (b) Irréductibilité
      - Polynômes irréductibles
      - Exemple de polynôme réductible sans racine
      - **Polynômes cyclotomiques**
      - Corps de rupture, corps de décomposition
   (c) Fractions rationnelles
      - Définition, degré, écriture unique
      - Décomposition en éléments simples
2. Polynômes symétriques et applications
   (a) Polynômes symétriques élémentaires
      - Définition des $\Sigma_k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} X^{i_1} \dots X^{i_k}$
      - Définition polynôme symétrique

- Théorème sur les polynômes symétriques
- Application : Théorème de D'Alembert-Gauss

(b) Applications en algèbre linéaire

- Relations coefficients-racines sur le polynôme caractéristique
- Application : diagonaliser des matrices 2x2 de tête !
- Localisation de valeurs propres : théorème des disques de Gerschgörin
- Méthode de Newton

3. Importance des racines de polynômes en analyse

(a) Dépendance continue des racines en fonction des coefficients

- L'application qui à un polynôme associe ses racines est continue (démo avec $||\cdot||_1$.
- Application : L'ensemble des polynômes scindés à racines simples est ouvert.
- Application : Robustesse des algorithmes numériques de recherche de valeurs propres.

(b) Approximation de fonctions

- Théorème de (Stone-)Weierstrass
- Polynômes orthogonaux : définition
- Application : polynômes de meilleure approximation [ObA] p111 (appli 3.47)

2.150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. C'est quoi un invariant de similitude ? (total ? complet ?) Connaissez-vous des invariants partiels ?
2. La décomposition en espaces cycliques est-elle unique ? Exemple avec l'endo nul.
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, quels sont les invariants de similitude ?
4. Est-ce qu'on peut faire des choses avec Frobenius qu'on ne peut pas faire avec Jordan ?
5. Pertinence des actions de groupes en L1/L2 (avant le cours de théorie de cours) ? Pourquoi est-ce intéressant de regrouper les endomorphismes par orbites ?
6. Quel est $Aut(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (vue comme algèbre) ?
7. Utilité de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$? Bruhat ?
8. Différence entre équivalence et similitude
9. Est-ce que deux matrices de projection équivalentes sont semblables ?
10. Une matrice non scalaire qui n'a pas de matrice compagnon dans sa classe de similitude ?

Réponses

1. C'est un élément qui ne change pas par similitude. La trace, le déterminant, sont des invariants partiels de similitudes. Autre réponse : si on prend que le premier des invariants de Frobenius, genre le polynôme minimal, ce n'est plus un invariant total.
2. Pour $u = 0$, n'importe quelle décomposition en droites convient. (un espace cyclique = un espace de la forme $\{P(u)(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$

3. Soit $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{C})$. On a soit $\deg(\pi_f) = 1$ auquel f est diagonalisable (et en fait c'est une homothétie), soit $\deg(\pi_f) = 2$.
4. La décomposition de Frobenius est valable sur n'importe quel corps, contrairement à Jordan qui n'est valable que dans le cas χ non scindé (on est obligé d'aller chercher une extension de corps).
5. Changements de base : on regroupe tous les endos atteignables par changement de base. Pourquoi ? Parce que "ils se ressemblent", ils ont des propriétés similaires. Exemple de GL_n par conjugaison : on veut se débarasser de l'arbitraire. On veut préciser "ce qui ne dépend pas de la base". Les orbites, c'est des tiroirs, et les matrices des chaussettes et des t-shirts. C.F pages ? ? des H2G2.
6. C'est $PGL_n(\mathbb{K})$ (il n'y a que les conjugaisons, et ça passe au quotient).
7. Dans le pivot de Gauss, on veut l'existence d'un pivot. Dans Bruhat, on ne l'utilise pas.
8. I_2 et $I_2 + E_{1,2}$ sont équivalentes (même rang) mais pas semblables (pas le même polynôme minimal).
9. Oui, car elles sont semblables à (diag en colonne) $I_p o_{n-p}$.
10. Une matrice de taille 4 avec comme invariants X et $X^3 + X$ par exemple.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. Action par translation à gauche [H2G21]
   - Action $P \cdot A := PA$
   - Orbites = Même noyau
   - $Stab(A) = \{I_n\}$: action libre
   - Partition en orbites via la forme échelonnée : $\mathcal{M}_{n,p} = \bigcup_{M \in \mathscr{E}_{n,p}} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cdot M$
   - Applications de la FREL : rang, inversion de systèmes
   - Pivot de Gauss
   - Générateurs de GL_n, de SL_n [Per]
2. Action par conjugaison [H2G21]
   (a) Action de GL_n sur $\mathcal{M}_n$
      - Action $P \cdot A := PAP^{-1}$
      - Classes de conjugaison = matrices semblables
      - Application : **Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$**
      - Stabilisateur $Stab(A)$ =c.f la démo du dév ci-dessus (espaces stabilisés)
      - Propriétés conservées : rang, polynôme caractéristique (donc det, trace, ...)
      - Propriété $\mathbb{C}$-semblable ssi $\mathbb{R}$-semblable
      - Interprétation comme un changement de base (changement de coordonnées donné par $X \to P^{-1}X$

        - Application : action sur les matrices diagonalisables, triangulaires, nilpotentes.
    (b) Action de O_n sur $\mathcal{S}_n$ [GouAl] [TE1MP] chap14
        - Théorème spectral [GouAl]
        - Contre-exemple symétrique non diagonalisable dans $\mathbb{C}$ [TE1MP]
        - Exemple des polynômes de Legendre [TE1MP] p833+838
        - Application à la racine carrée d'une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}$, à la décomposition polaire [GouAl]
        - Pseudo-réduction simultanée
3. Action par congruence et formes quadratiques [dSP]
    (a) Action par congruence et équivalence de formes quadratiques [Per] ($\sigma = id$ ou conjugaison)
        - Matrices congruentes ssi formes quadratiques équivalentes
        - Définition du discriminant comme $[det]_{\mathbb{K}/\mathbb{K}^{\times 2}}$
        - Existence de bases $q-$orthogonales
    (b) Application à la classification [Per]
        - Classification sur $\mathbb{C}$
        - Théorème de Sylvester (classification sur $\mathbb{R}$)
        - **Classification des formes quadratiques sur les corps finis**
4. Représentations de groupes [Col]
    - Definition vue comme action "linéaire" de G sur V et comme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$
    - Définition simultanée de sous-représentation, de représentation irréductible
    - Exemple : représentation par permutations de coordonnées de $\mathfrak{S}_n$ + la représentation H fournit des matrices de permutation
    - Produit scalaire sur les fonctions centrales + caractérisation rps irréductibles via ce produit scalaire
    - Table de S4 ?

Remarques : Faire une introduction à la présentation du plan !!! Pour trouver des idéees : mettre en commun avec ses camarades.
Ne pas dire "je vais le montrer à la fin".

2.151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Leçon du 20-01 : Raphaël Goldbaum et Sybille Marcotte avec Lionel Fourquaux
Développements : Commutant et polynômes caractéristique et minimal, invariants de Frobenius. Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Théorème de Carathéodory : vous avez dit que ça permettait de savoir combien de points il fallait pour faire une enveloppe convexe. Cela vous paraît-il raisonnable ?
   Si A ensemble de points, il suffit de prendre $n+1$ points de A pour avoir $Conv(A) = Conv(x_0, \ldots, x_n)$?
   Par exemple en dimension deux, une enveloppe convexe est engendrée par 3 points ? (essayez avec les 4 sommets d'un carré)

2. Est-ce que deux matrices ayant même rang sont semblables ?
3. Soient A, B matrices carrées complexes telles que $\text{rg}((A - \lambda I)^m) = \text{rg}((B - \lambda I)^m)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. Montrer que A et B sont semblables.
4. Soit q une forme quadratique non dégénérée. Définition vecteur isotrope ? Espace totalement isotrope ? Que pouvez-vous dire de la dimension d'une sous-espace totalement isotrope ? Si F sous-espace totalement isotrope de E de dimension n, par exemple. On se place en caractéristique différente de 2. (prenez $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si vous voulez)
Indication : montrez que $dim(F) \leq n/2$. Vous pouvez "voir" ϕ comme une application de F dans son dual. Indication 2 : que dire de $\psi : x \in E \mapsto \phi(x, .) \in E^*$ et de sa restriction au sous-espace F ?
5. Pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(k)$ avec $card(k) > 2$, k fini, montrer que A est somme de deux matrices inversibles. Indication : caractérisation du rang avec J_r. [ObA] p153

Réponses

1. Il y a clairement un problème avec l'exemple du carré. Le théorème ne dit pas que le carré est un triangle, mais que le carré est la réunion des 4 triangles possibles. (formulation dans le plan est juste). Tous les points de l'enveloppe convexe peuvent être écrits comme barycentres de n+1 points, mais pas forcément les mêmes pour tous les points de cette enveloppe.
2. Si deux matrices ont le même rang alors elles sont équivalentes : il existe U et V inversibles telles que $A = UJ_rV$. Un contre exemple de matrices équivalentes non semblables :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalente mais non semblable à I_2
3. Idée : Jordan (blocs de Jordan = invariants complets de similitude). Par hypothèse sur A et B, on montre que A et B ont mêmes blocs de Jordan. On montre qu'elles ont les mêmes suites de noyaux itérées.
4. C'est un x non nul tel que $q(x) = 0$. Un espace totalement isotrope est un (E, q) tel que tout vecteur de E est isotrope.
L'application $\psi : x \in E \mapsto \phi(x, .) \in E^*$ est, puisque q est non dégénérée, un isomorphisme. $x \in F \mapsto \phi(x, .) \in E^*$ et $\phi(x, .)$ est dans F°. Donc $\dim(F)+\dim(F^\circ) = n = \dim(E)$ et donc $\dim(F) \leq \dim(F^\circ)$ d'où le résultat.
5. Pour J_r, il existe $a \in k$ qui est ni 0 ni 1, d'où $J_r = aI_n + J_r - aI_n$ somme de deux matrices inversibles, d'où le résultat.

Métaplan :
Cadre : Les espaces vectoriels seront sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

1. Notion de dimension d'un espace vectoriel
   (a) Familles libres, génératrices, bases
      - Définition famille libre, génératrice
      - Exemples en dimension 1 à 3 : colinéarité, coplanarité
      - Exemple de famille libre / génératrice dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$
      - Définition base
      - Théorème admis : il existe une base pour tout ev
   (b) Espaces vectoriels de dimension finie
      - Définition ev de dim finie (famille génératrice finie)

- Théorème de la base incomplète, de la base extraite
- Définition dimension
- Exemple de récurrence sur la dimension : classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$

(c) Calculs de dimensions

- Dimension d'un produit cartésien, d'une somme directe
- Caractérisation de la somme directe en dimension finie
- Formule de Grassmann
- Exemple où $F \cap G \neq \{0\}$
- Dimension d'un quotient E/F [MaMn]

2. Applications linéaires

(a) Applications linéaires et matrice associée

- Définitions (?)
- Dimension : relation d'équivalence, isomorphisme à $\mathbb{R}^{\dim(E)}$ (iso non canonique)
- Def matrice associée à une AL dans une base

(b) Hyperplans et dualité en dimension finie

- Définition forme linéaire, définition hyperplan
- Dual d'un ev, base duale
- **Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et applications** [GouAl]
- Lemme des extrema liés (si $\bigcap \mathrm{Ker}(d_a g_i) \subset \mathrm{Ker}(d_a f)$ alors la famille est liée dans $E*$
- **Théorème des extrema liés**

3. Rang, dimension de noyaux

(a) Notion de rang

- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice
- Forme échelonnée par lignes d'une matrice
- Pivot de Gauss (en annexe)
- Caractérisation du rang par équivalence

(b) Théorème du rang

- Théorème du rang (v1 = tout supplémentaire du noyau et v2 = dimension du rang)
- Application : Théorème d'isomorphisme en algèbre linéaire
- Caractérisation de la somme directe entre Ker et Im via $f = f^2$
- Exemples projecteurs $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id)$ et somme directe, exemples symétries

(c) Réduction d'endomorphismes

- Existence d'un polynôme annulateur [TE1MP] p33
- Idéal annulateur et polynôme minimal
- Espaces propres
- Lemme de décomposition des noyaux

- Multiplicité algébrique et géométrique des valeurs propres, contre-exemples

4. Topologie dans un espace vectoriel de dimension finie (facultatif / à l'oral si pas la place)
   - Topologie intrinsèque via l'équivalence des normes
   - Contre-exemple normes non équivalentes (polynômes, normes fonctionnelles)
   - Caractérisation de la compacité

Autres remarques : on peut parler aussi de représentations de groupes dans cette leçon.
Dans l'ensemble : développements bien taillés, exposé bien préparé.
Sur la forme : éviter d'être devant notre texte (se décaler systématiquement dès que l'on n'écrit pas). Au niveau de l'introduction de notations : éviter les doublons ($T_n^{(}\mathbb{K}$) n'est pas une notation standard). Et il faut écrire gros ! Si le tableau est trop petit, il vaut mieux demander à effacer.
Plan : pas fan de la partie III sur la récurrence sur la dimension. Eventuellement parler de représentations.
Choix de développements : 2 sur les poly d'endo. Le théorème sur le commutateur est bien, mais il serait peut-être mieux de remplacer Frobenius par un autre.
Il faut avoir le réflexe Jordan <-> suite de noyaux itérés.
Autres choses à mettre : formes quadratiques, et sinon c.f rapport du jury.

2.152 Déterminant. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Questions pendant mon oral blanc d'avril
Questions

1. Quelle est l'interprétation (géométrique) du déterminant de Gram $G(e_1, \dots, e_n)$? Déduisez-en une interprétation de la formule $d(x, V)^2 : \dfrac{G(x, e_1, \dots, d_n)}{G(e_1, \dots, e_n)}$
2. Vous avez dit dans votre plan que le déterminant était un outil intéressant pour déterminer si une matrice était inversible ou non, pouvez-vous préciser ?

Réponses

1. C'est le volume du parallélotope de $\mathbb{R}^n$ défini par les e_i. La formule du déterminant de Gram s'apparente ainsi, au carré près, à une formule de la forme hauteur = aire/base.
2. Longue discussion avec des difficultés de ma part ; ils voulaient me faire dire qu'au final un calcul de déterminant, même rendu "efficace" par des développements par rapport aux lignes/colonnes ne valait pas un pivot de Gauss. Conclusion : pratique en théorie, mais ce n'est pas utilisé en pratique pour déterminer si une matrice est inversible ou non (et encore moins pour calculer des inverses, c.f complexité des formules de Cramer)

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

2.153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 07/04 - Vivien Kordinski et Abel Frappat avec Lionel Fourquaux.
Questions

1. Démontrez Cayley-Hamilton
2. Soit $M = S + N$ une décomposition de Dunford d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Ker}(N)$
3. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ telle que $M = UNU^{-1}$. Montrer qu'elles sont orthogonalement codiagonalisables. Indication : montrer qu'elles sont semblables pour des matrices de passage réelles. Indication 2 : Ensuite, utiliser la décomposition polaire.

Réponses

1. c.f Gourdon (corps des racines d'un polynôme)
2. Il faut écrire S comme polynôme en M sans coefficient constant.
3. On identifie partie réelle et partie imaginaire : $MU_R = U_R N$ et $MU_I = U_I N$. Idée : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M(U_R + tU_I) = (U_R + tU_I)N$. En passant au déterminant, $\det(M(U_R + tU_I)) = \det((U_R + tU_I)N)$ est un polynôme non nul puis ? ? ?
   Sinon : réduction de Frobenius (ne dépend pas du corps) donc ici M et N sont semblables sur $\mathbb{R}$.
   Une fois qu'on a M et N semblables sur $\mathbb{R}$, on fait une décomposition polaire (donnée par des polynômes) : fait disparaître la matrice symétrique.

Motivations

Métaplan :
Cadre : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Polynômes annulateurs et l'algèbre $\mathbb{K}[u]$
   (a) Polynômes annulateurs
      - Définition de $ev_u : P \mapsto P(u)$, définition idéal annulateur et polynôme minimal

- Exemples de polynômes minimaux (cas nilpotent)
- Exercice 30 p34 [TE1MP] : calcul de A^n grâce au polynôme annulateur
- Application : calcul de l'exponentielle de cette matrice

(b) Structure d'algèbre [TE1MP] page 33-34

- Isomorphe à $\mathbb{K}[X]$ si pas de poly annulateur et à $\mathbb{K}[X]/\langle \pi_u \rangle$ sinon.
- $\mathbb{K}[u]^\times = \{P(u), P$ premier avec $\pi_u\}$.
- Corps ssi π_u irréductible ($\mathbb{K}[X]/\langle \pi_u \rangle$ corps ssi l'idéal est maximal ssi π_u irréductible).

2. Réduction d'endomorphismes

(a) Polynôme caractéristique et lemme des noyaux [TE1MP]

- Déf polynôme caractéristique
- Propriétés $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
- **Théorème de Cayley-Hamilton**
- Sous-espaces caractéristiques/propres (+exemples)
- Lemme de décomposition des noyaux
- Application : décomposition en sous-espaces caractéristiques
- Polynôme caractéristique = invariant partiel de similitude (semblables $\Rightarrow$ même polynôme caractéristique) + contre-exemple dans $\mathbb{R}^4$ avec deux blocs de Jordan 2x2
- Invariants complets lorsque $n \leq 3$ [GouAn] annexe 2

(b) Diagonalisation, trigonalisation [TE1MP]

- Déf et caractérisations diagonalisabilité
- Applications : calcul de $P(A)$, de $\exp(A)$
- * Théorème spectral
- Trigonalisation, cas de $\mathbb{C}$
- Application : calcul de déterminant, de polynôme caractéristique

(c) Décomposition de Dunford, de Jordan

- **Décomposition de Dunford**
- Application au calcul d'exponentielles de matrices
- Suite de noyaux itérés
- Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents
- Réduction de Jordan
- Exemples
- Invariants complets de similitude

3. Réduction de Frobenius

(a) Matrices compagnon et endomorphismes cycliques [GouAl] annexe 2

- Définition, polynôme caractéristique d'une matrice compagnon
- Endomorphismes cycliques et caractérisation via matrices compagnon et via $\pi_u = \chi_u$
- Espaces cycliques

- Il existe x tel que $\pi_{u,x})\pi_u$ [GouAl] p178 exo3

(b) Théorème de réduction de Frobenius [GouAl] annexe 2

- Théorème de Frobenius
- Réduction de Jordan des nilpotents comme corollaire de Frobenius (nilpotent implique ${}^tC_P = {}^tC_{X^p} =$ bloc de Jordan)

Autres remarques :

Plan : le contenu est bien, peut-être améliorable au niveau de l'orga/l'enchaînement des résultats. Plan qui reprend le titre de la leçon : peu original mais difficile de faire mieux ici.
Pas d'obligation de parler de modules.
Développements : il faut penser à prévenir au + vite le jury quand on admet des résultats !
Frobenius par rapport à Jordan : pas besoin d'hypothèse scindé => les coeffs des matrices de passages sont dans le même corps que celui de la matrice de départ.

2.154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Comment montre-on qu'il existe x tel que $\pi_{u,x} = \pi_x$?
2. Quand on a un endo $f \in \mathcal{L}(E)$, existe-il une décomposition unique en sous-espaces propres ?
3. Si vous faisiez cours à des L3, que diriez vous pour montrer l'importance des sous-espaces propres ?
4. Donnez un exemple d'endo non trigonalisable. Donnez un exemple d'endomorphisme naturel (en analyse, en algèbre, en arithmétique...)
5. Expliquez comment calculer une décomposition de Dunford, et éventuellement l'application au calcul d'exponentielle. Exemple sur $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
   En option B, quelle est l'approche ?
6. Y a-t-il des endos avec un nombre infini de sev stables ? Trouvez un endo qui a un nombre fini de sev stables.
7. Est-ce que si $f = d + n$, un sous-espace est stable pour f ssi il l'est pour d et n ? Est-ce que dans cette équivalence, on peut enlever l'une des deux conditions sur n ou d ?
8. Montrez que si u endo alors $\mathrm{Ker}(u)$ admet au plus un unique supplémentaire stable par u. Indication : montrez que c'est $\mathrm{Im}(u)$.

Réponses

1. Le point clé est de décomposer par lemme des noyaux, et sur espaces caractéristiques, $(f - \lambda_i id_E)$ est nilpotent d'indice $p_i - 1$. On montre qu'un $x \in \mathrm{Ker}((f - \lambda_i id_E)^{p_i-1})^*$ satisfait la proposition sur l'espace caractéristique.
2. Décomposition en espaces caractéristiques. Décomposition de Fitting.
3. Cela permet de décomposer un problème d'algèbre linéaire en "sous-problèmes", un peu comme les sous-groupes(distingués) en algèbre (jusqu'aux groupes simples), la décomposition en facteurs premiers en arithmétique, ...

4. Celui associé à la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Exemples naturels : rotations (sauf $\pm id$). Autre exemple : les endos nilpotents non nuls.
5. Calcul effectif de Dunford : avec Newton. A partir de cette décomposition, $\exp(A) = \exp(D+N) = P\exp(\Delta)P^{-1}\times$ polynôme en N.
   En calcul scientifique, on essaie d'approcher les approximation des racines.
6. Pour 0, tout espace est stable. Pour $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, les sev stables "évidents" sont les 4 espaces propres. Si il existe un sev F stable, on sait que $u_{||F}$ induit sur F par u est aussi diagonalisable. Donc F est somme directe des droites propres précédentes. Ainsi, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour F.
7. Le sens indirect est vrai. Le sens direct aussi, car ce sont des polynômes en f !
   Non, car si $d = id$ alors tout sous-espace est stable par d. Si on prend n nilpotent non nul, par exemple $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
8. Soient E_1, E_2 des supplémentaires de $\mathrm{Ker}(u)$ stables par u. Alors si $x_1 \in E_1$, $x_1 = y_2 + z_2$ vérifie $u(x_1) = u(y_2) \in E_1 \cap E_2$ par stabilité. On va montrer que $E_i = \mathrm{Im}(u)$.
   On pose $F = E_1$. On considère l'endo induit $u_{||F}$ par u sur F. Alors $u_{||F}$ est injectif donc bijectif. Donc $u(F) = F$. Donc $F \subset u(F) = \mathrm{Im}(u)$. Par théorème du rang on a égalité des dimensions, on en déduit que $F = \mathrm{Im}(u)$.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. Sous-espaces stables d'un endomorphisme
   (a) Premières définitions [TE1MP]
      - Sous-espace stable
      - Endormorphisme induit
      - Supplémentaire stable (exemple et contre-exemple d'existence, c.f [MaMn])
      - Ex : une homothétie stabilise tout ev
      - Si u et v commutent alors les noyaux et images de l'un sont stables par l'autre
   (b) Cas matriciel
      - Matrices par blocs
2. Polynômes d'endomorphismes et réduction
   (a) L'algèbre $(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$
      - Définition

- Stabilité de $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$
- Lemme des Noyaux

(b) Espaces cycliques[MaMn]

- $\deg(\pi_{u,x}) = \dim(E_{u,x})$

(c) Décomposition de Dunford

- **Décomposition de Dunford**
- Application au calcul de $\exp(A)$

3. Sous-espaces stables d'endomorphismes remarquables

(a) Endomorphismes diagonalisables, trigonalisables

- Endos stabilisant $vect(e_i)$ pour tout i sont les endos diagonaux
- Se stables d'un endo diagonalisable
- Se stables d'un endo trigonalisable
- **Dénombrement des matrices diagonalisables de $\mathbb{F}_q$**

(b) Endomorphismes nilpotents

- Sous-espaces stables d'un bloc de Jordan nilpotent
- Réduction de Jordan pour les nilpotents
- Réduction de Jordan cas général

4. Représentations de groupes [Col]

- Définition
- Théorème de Maschke
- Cas abélien

Remarques sur le plan : Plan bien, pas d'erreur, équilibré. Les représentations même pour une partie courte sont une bonne idée (au moins jusqu'au théorème de Maschke). Faire des sous-parties quand même (notamment dans le III)endos remarquables). Présentation orale du plan : il ne faut pas aller trop vite. Partie introductive : au moins 30sec, même 1min.

2.155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Questions :

1. Pourquoi F stable vérifie $F = \bigoplus_k (E_k \cap F)$?
2. Remarque 50 : Dunford avec $\mathbb{K}$ pas algébriquement clos ? Corps de décomposition + décomposition de Dunford là dessus (le polynôme devient scindé) : quel lien avec la décomp en rq 50 ?
3. Comment voir facilement si une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ est diagonalisable ?
4. Si on considère une représentation d'un G abélien, que peut-on dire de la déc en rps irréductibles ?
5. Dunforder la matrice $\begin{pmatrix} a & x & z \\ 0 & a & y \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
6. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, e^A est diagonalisable ssi A diagonalisable

Réponses :

1. $F = \bigoplus_k \mathrm{Ker}(P_k(u_{|F}) = \bigoplus_k \mathrm{Ker}(P_k(u) \cap F = \bigoplus_k (E_k \cap F)$
2. Il y a une petite différence : les matrices sont définies sur l'extension. Il y a un petit travail pour montrer qu'elles sont définies sur le corps de base.
(ce qui a piqué Lionel : **"une autre"** Décomposition de Dunford : non c'est la même !!)
3. c'est le fameux critère $M^q = M$. Déjà, $X^q - X$ est scindé à racines simples. Réciproquement si $M = PDP^{1-}$, on a $D^q = D$ car on est dans $\mathbb{F}_q$ d'où $M^q = M$.
4. La décomposition est constituée de représentations irréductibles de dimension 1. Dans le sens réciproque : il y a $|G|$ représentations irréductibles donc $|G|$ classes de conjuguaison : G. abélien.
5. La matrice piège pour Dunford, épisode deux. Il faut distinguer les cas $a = b$ et $a \neq b$. Si $a = b$ la décomposition est celle obtenue en séparant simplement la diagonale et la partie supérieure (commute car scalaire). Si $a \neq b$, il faut regarder l'espace propre E_1, et plus précisément distinguer les deux cas possibles pour la décomposition par blocs de A (de la forme $(1, 2)$ ou $(2, 1)$ pour les tailles des blocs diagonaux des blocs associés respectivement aux valeurs propres a et b.). On obtient

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dfrac{xy}{b-a} + z \\ 0 & a & y \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & -\dfrac{xy}{b-a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut mettre aussi dans le plan : FFT

Sinon : les choix sont bien. Le critère $M^q = M$ est pertinent à mettre dans le plan lorsque l'on parle de diagonalisation dans $\mathbb{F}_q$. On peut parler de théorème de la base incomplète aussi. Pour le développement : attention lorsqu'on présente un résultat comme Dunford, il faut bien sûr savoir l'appliquer sur des cas simples !!

Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorith- miques et conséquences théoriques.

2.156 Exponentielle de matrices. Applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 17/03 - Paul Mansaranez et Arnaud Nerrière avec Lionel Fourquaux

Questions

1. Calculer exp de $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $M \in SO_n(\mathbb{R})$ est-elle toujours une exponentielle d'une autre matrice ?
3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. B est-elle une exponentielle ?
4. Pourquoi $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ =carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Réponses

1. c.f openboard
2. Non. Rappel, $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) =$ carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un carré.

3. c.f openboard
4.

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

Remarques : Le plan est bien peut être mieux organisé. Peut-être que le lien entre exp et polynômes d'endomorphismes peut être mieux mis en valeur (+lien Dunford qui donne le résultat D et N polnômes en A) (très utile en pratique pour calculer). Présentation plan trop courte : dire quelle idée clé on peut dégager, ne pas hésiter à ne pas trop passer de temps sur les sous-variétés.
Dans le cas où on nous donne un calcul d'exp non diagonalisable : Il suffit de se ramener sur chaque sous-espace caractéristique (on obtient des polynômes d'endomorphisme) ou bien avec Dunford. Il faut s'entraîner à faire ça. Il ne faut pas faire de calcul de limite ! !

2.157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Est-ce que la somme de deux matrices nilpotentes est nilpotente ?
2. Peut-on trouver deux matrices 2x2 nilpotentes non colinéaires mais qui commutent ?
3. A quoi ressemble l'ensemble des matrices nilpotentes 2x2 à coefficients réels ? Est-ce un ouvert, un fermé ?
4. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $C = AB - BA$. On suppose que C commute avec A et avec B. Montrer que C est nilpotente. Indication : chercher les valeurs propres.
5. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que AB et BA sont semblables ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rg}((AB)^n) = \mathrm{rg}((BA)^n)$.

Réponses

1. Si elles commutent, oui. Sinon, un contre-exemple est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Oui : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On a $\mathscr{N}_2(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(0)$ avec $\phi : A \mapsto A^2$ qui est continue, donc c'est un fermé.
4. On remarque que si λ est une valeur propre de C et X un vecteur propre associé alors $ACX = CAX = \lambda AX$ donc AX est un vecteur propre. Autrement dit, $E_\lambda = \mathrm{Ker}(C - \lambda I_n)$ est stable par A. De même, il est stable par B. Donc $(AB - BA)E_\lambda \subset E_\lambda$. L'idée ensuite est de prendre une base de trigonalisation commune à A et C par exemple (faisable car stabilité espaces propres par A et A et C trigonalisables).

5. Cas inversible : le rang est toujours n. Cas non inversible : on a toujours $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Pour remontrer cela, on peut regarder le cas inversible et passer au cas général par densité.
   Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rg}((AB)^n) = \mathrm{rg}((BA)^n)$. Si AB est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{pmatrix}$ et BA à $\begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ avec N_i nilpotentes et P_i inversibles, alors N_0 et N_1 ont même suites de noyaux itérées donc sont semblables. Montrons maintenant que P_0 et P_1 sont semblables.

Motivations

La trigonalisation est la réduction la plus simple sur le plan des hypothèses : il suffit d'avoir un polynôme caractéristique scindé (dans $\mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable). Dans la réduction de Jordan, c'est pour chaque bloc une trigonalisation qui s'opère, et le cas particulier est le cas de la valeur propre nulle, c'est à dire de la "composante" nilpotente de la matrice / de l'endo que l'on réduit.
Calculer l'exponentielle d'une matrice nilpotente est simple car c'est une somme finie.

Métaplan :
Cadre :

1. Endomorphismes nilpotents, unipotents
   (a) Notion de nilpotence, d'unipotence
      - Définition endo nilpotent, indice de nilpotence
      - Exponentielle envoie les nilpotents sur les unipotents

   (b) Lien avec les endomorphismes cycliques [GouAn] et [Gri]
      - Déf endo cyclique
      - si u nilpotent, u cyclique ssi $\pi_u = X^n$ ssi bloc de Jordan. [Gri] chapitre Jordan lemme 1
2. Trigonalisation [TE1MP], [GouAl]
   (a) Matrices triangulaires
      - Valeurs popres, trace, déterminant, polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire
      - Stabilité par produit, par somme, par inversion

   (b) Trigonalisation et applications
      - Définition trigonalisabilité
      - Caractérisation χ_u scindé
      - Application : tout le monde est trigonalisable dans $\mathbb{C}$
      - Critère de cotrigonalisabilité [TE1MP] exo 2.25 page 133
3. Réduction de Jordan, de Dunford
   (a) Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford
      - **Décomposition de Dunford**
      - Application au calcul d'exponentielles de matrices

- **Images de l'exponentielle matricielle**

(b) Réduction de Jordan

- Suite de noyaux itérés
- Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents
- Application : deux matrices nilpotentes sont semblables ssi elles ont la même suite de noyaux itérés
- Réduction de Jordan
- Exemples
- Invariants complets de similitude

Autres remarques : plan raisonnable mais manque de remarques concrètes ("à quoi ça sert Jordan" par ex) et d'applications. La réduction de Jordan est la star de cette leçon, et devrait avoir droit à ses applications.
Idée de la leçon : la seule obstruction à Jordan est les nilpotents : si on a un corps suffisamment gros, on peut réduire toutes les matrices.

2.158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Rapport du jury 2020 : Leçon du 06/01
Questions :

1. Qu'est-ce que dit le Lemme de Morse ? A quelle condition sur la signature du point critique pour que l'hypersurface $\{f = f(0)\}$ soit difféomorphe à une sphère ?
2. On fait le changement de coordonnées de Morse. f est une forme quadratique. Trouver les points critiques de f. (c'est quoi la différentielle de f ?)
3. Si $f(x, y) \in \mathbb{R}$ est nulle en 0 et s'annule sur 3 droites qui passent en 0 ? Montrer que 0 point critique dégénéré.
4. Soit V un $\mathbb{R}-$ev de dimension $n < \infty$ et V^* son dual. On pose $E = V \times V^*$ et on considère une forme linéaire l sur E. On considère $q : (v, l) \in V \times V^* \mapsto l(v)$. Montrer que q est un forme quadratique et donner une base de E dans laquelle on peut écrire "facilement" la forme quadratique q.
5. Sur $\mathbb{C}^3$ on considère $q(z) := det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{pmatrix}$. q forme quadratique ?
6. Sur le plan : Partie pseudo-réelle et pseudo-imaginaire : c'est quoi ? On a donc une forme quadratique q_A associée à A et q_B hermitienne associée à B. Ecrire la forme quadratique réelle q associée à $A+iB$ sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}^n$.

Réponses :

1. Si on prend un point critique, les lignes de niveau seront difféomorphes à des coniques. Sphère ssi $(n, 0)$ ou $(0, n)$.
2. On a $df(x) =$ forme polaire $= 2(u_1, ..., u_p, -u_{p+1}, ..., -u_n)$
3. Après difféomorphisme, on se ramène à une forme quadratique. En fait on ne peut pas avoir plus de deux droites

4. On considère $b : ((v_1, l_1), (v_2, l_2)) \mapsto \frac{1}{2} l_2(v_1) l_1(v_2)$ (on n'a pas envie d'évaluer l_i en v_i sinon on n'aura jamais $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$).
   Soit $\mathcal{V} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $\mathcal{B} := ((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e_1^*), \dots, (0, e_1^*)) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ où $\mathcal{V}^* = (e_i^*)$ base duale associée. On a
   $$q(x, y) = \sum x_i y_i.$$
   Remarque importante : si on pose $\varphi : ((v_1, l_1), (v_2, l_2)) \mapsto l_2(v_1)$, b n'est pas symétrique mais représente bien q ($\longleftarrow$ pas unicité si pas symétrie).
5. On vérifie déjà la CN $q(\lambda z) = \lambda^2 q(z)$. Ensuite, on peut poser $\varphi(z, w) := det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \overline{w_3} \end{pmatrix}$.
   Cette forme bilinéaire, bien que non symétrique, représente q. Pour la symétriser on fait pareil que précédemment : $\frac{1}{2}(\varphi + {}^t\varphi)$. (transposée = on permute juste les deux variables z et les w)
   Autre remarque : la condition $q(z) = 0$ est équivalente à z_i alignés dans le plan complexe $\mathbb{C}$. => Recasage dans les leçons rang d'une matrice, dans la leçon déterminant...
6. On peut décomposer une matrice hermitienne H d'une manière unique en $H = A + iB$ avec A symétrique et B antisymétrique. En fait cela s'appelle juste "partie réelle" et "partie imaginaire" de H.
   Soit e_i base canonique de $\mathbb{C}^n$.
   Alors $mat_{\mathcal{B}}(q) = M := \begin{pmatrix} Re(H) & -Im(H) \\ Im(H) & Re(H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Et en fait H hermitienne ssi M est symétrique.

Autres remarques : Carte mentale pour présenter le plan : bien. Mais penser à faire référence aux numéros. Ne pas oublier de donner des applications aux gros théorèmes, par exemple ici le Lemme de Morse ou la décomposition polaire (norme 2 d'une matrice par exemple).
Dès qu'il y a une implication, dire si la réciproque est vraie ou fausse.
Idées de choses en plus : Des coniques. Plus Analyse numérique : résolution d'équations $AX + B = 0$: Choleski, équation normale ${}^tXAX + BX = 0$ (minimum de cette équation = solution). Pour les algébristes : action de GL_n sur $\mathfrak{S}_n$ par congruence, orbites (données par la signature), $\mathfrak{S}_n / \mathrm{GL}_n$.
Encore des remarques : éventuellement parler, si on parle de côniques, de cône isotrope

Métaplan :
Cadre :

1. Propriétés des matrices symétriques et hermitiennes
   - Définition matrices symétriques, hermitiennes
   - Exemple symétriques : matrice du laplacien, ${}^tAA$ avec A rectangulaire quelconque
   - Exemple hermitiennes : ?
   - Somme directe $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$ et idem hermitiennes
   - Valeurs propres réelles
   - Lien avec l'endo adjoint
2. Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
   (a) Actions par conjugaison et théorèmes de réduction

    - Def endo autoadjoint (éventuellement via le th de représentation de Riesz)
    - Théorème de réduction des endomorphismes autoadjoints
    - Corollaire : théorème spectral et équivalent hermitien avec U_n
    - Application : racine carrée d'une matrice hermitienne
    - **Décomposition polaire**
    - Application : description topologique de GL_n
  (b) Action par congruence de GL_n et formes quadratiques
    - Réduction de Gauss d'une forme quadratique
    - Application : existence de bases orthogonales
    - Pseudo-réduction simultanée $A = P^T P, B = P^T DP$
    - Application : inégalité de convexité sur le det [?]
    - Classification sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ (Sylvester) + signature
    - **Lemme de Morse**
    - Applications du lemme de Morse : lieux des 0 d'une fonction f avec un point critique non dégénéré
    - Classification sur $\mathbb{F}_q$
3. Applications en analyse numérique matricielle
  (a) Rayon spectral et valeurs singulières
    - Expression de la norme 2 en fonction du rayon spectral de $A * A$ (valeurs singulières)
    * Quotient de Rayleigh [Cia]
    * Application : $|\alpha_k - \beta_k| \leq ||\delta A||$
  (b) Décomposition de Cholesky
    - Décomposition de Cholesky
    - Application à la méthode des moindres carrés
    - Application : régression linéaire
4. Applications en calcul différentiel
  - Matrice Hessienne
  - Théorème de Schwarz : matrice symétrique
  - Conditions nécessaires, conditions suffisantes d'existence et d'unicité d'extrema d'une fonction $\mathcal{C}^2$

2.159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Leçon du 02-12 - Valentine Videt et Loréana Sussepergui avec Matthieu Romagny

Motivations

En algèbre linéaire, une équation est la donnée du noyau d'un forme linéaire. On peut donc voir un espace donné par des équations comme une intersection d'hyperplans (et éventuellement de $\{0\}$). L'espace dual est donc "l'espace des équations possibles" en algèbre linéaire.
La vision duale apporte comme son nom l'indique une deuxième vision "parallèle" à la vision classique des vecteurs. Certains résultats sont transposables à l'espace dual, et il peut être judicieux dans certains problèmes de choisir l'angle de vue dual. Par exemple, il est souvent plus aisé de manipuler un hyperplan avec un vecteur normal qu'avec une base de cet hyperplan.

Métaplan :
Cadre : $\mathbb{K}$ corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

1. Notion d'espace dual [Gri] p82-86
   (a) Définitions
   - Def forme linéaire et def E^*
   - Base duale
   - $E \simeq E^*$ non canonique
   - $E \simeq E^{**}$ canonique
   - Base antéduale
   - Passage d'une base duale à l'autre [GouAl] p130

   DEV **Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et applications** [GouAl] 3 p132 et 8 p154

   (b) Hyperplans
   - Def hyperplan
   - $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ ssi colinéaires
   - Lien vecteur normal et forme linéaire
   - Dimension d'une intersection d'hyperplans, exemple droite = intesection de 2 plans
   - Lien avec résolution système linéaire exemple [Gri] p85
2. Orthogonalité
   (a) Définitions [Gri]
   - Définition orthogonal, définition annulateur , définition somme directe orthogonale
   - Lien dimensions
   - En dim finie $F \oplus F^{\perp} = E$ et $F^* \oplus F^{\circ} = E^*$
   - Exemple projecteur Im et Ker en somme directe orthogonale
   - Autres propriétés (p.95 exo 36)
   - Définition application transposée
   - Lien avec la matrice transposée + propriétés exo 35 p.95
   - Lien image et noyau de f et ${}^t f$ exo 37 p.95

   (b) Théorème de projection orthogonale [GouAl], [Gri]

- Théorème de projection orthogonale [GouAl] p242
- Exemple numérique
- Théorème de représentation de Riesz
- Application : existence et unicité du gradient
- Application : existence et unicité de l'adjoint d'un automorphisme [GouAn] section Hilbert
- Propriétés de l'adjoint exo 21 [Gri] p258

3. Applications en analyse
   (a) Calcul différentiel [Ave], [Rou]
   - $d_a f$ est une forme linéaire
   - Notation dx_i pour la base duale
   - Sous-variété
   - Espace tangent + dimension

   DEV **Théorème des extrema liés + Application au théorème spectral**[3] [Ave]

   (b) Excursion en dimension infinie [GouAn]
   - Propriétés conservées : dimension $F^{\perp}$
   - Critère de densité sur les Hilbert
   - Contre-exemple $F \neq F^{\perp\perp}$ en dimension infinie. (prendre n'importe quel espace dense, par exemple $\mathcal{C}^0$ dans L^2 sur un segment, ou les polyômes dans $\mathcal{C}^0$)

Questions :

1. Dans le bonus du développement, est-ce que seulement endormorphisme suffit pour avoir isomorphisme ?
2. Est-ce que, si σ permutation, $Tr(A_1A_2A_3) = Tr(A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}A_{\sigma(3)})$?
3. Appli 52 : quels sont ces endos ? (rebondit sur la réponse :) Exemples d'endomorphismes orthogonaux ?
4. Quel corps $\mathbb{K}$ pour Taylor (Appli 64)
5. Question possible : montrer que si $g(AB) = g(BA)$ pour toutes matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $g(I_n) = I_n$ alors g conserve la trace.
6. Démontrer prop 42 : $rg(u) = rg({}^t u)$, $\mathrm{Im}({}^t u) = \mathrm{Ker}(u)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}({}^t u) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$. Commencer par montrer que si u injective alors ${}^t u$ surjective, et vice-versa.

Réponses :

1. Contre-exemple : l'endo nul.
2. On peut avec un $3-$cycle mais pas avec une transposition. Contre-exemple avec les matrices élémentaires.
3. Ce sont les endos symétriques (et non orthogonaux). Rotations.
4. Caractéristique : pas de problème. $\mathbb{K}$ quelconque.
5. Fait en développement ici.

3. En admettant la dimension de l'espace tangent

6. Penser à voir $u : E \hookrightarrow F$ comme $E \subset F$. La question se ramène à montrer que toute forme $g \in E^*$ peut s'écrire $\phi \circ u$ c'est à dire moralement $\phi_{|E}$ avec $\phi \in F^*$. Il suffit en fait de prolonger par 0.
   Si u surjection de E dans F, on suppose que $\phi \circ u = 0$ et on veut montrer que $\phi = 0$. Pour $y \in F$, il existe $x \in E$, $u(x) = y$ donc $\phi \circ u(x) = \phi(y) = 0$. D'où le résultat.

Sur le plan : Changer la prop 50 (Gourdon) : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux matrices de deux $\mathbb{K}$-ev de même dim finie alors ${}^t mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1}$ est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}^*$ vers $(\mathcal{B}')^*$.
Changer l'application 60.
Exemples explicites : 7, 14, 36... Il faut en mettre mais pas trop.

2.160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Décomposition polaire pour une matrice non inversible ?
2. Algo de calcul numérique de décomposition polaire ?
3. Donner les étapes du second développement.
4. Application 36 : Montrer que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est égal à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
5. Application sur une matrice 3x3 : caractériser la transformation géométrique qu'est $A = (1/3)(2 \times ones(3,3)$ - $3\times$ matrice de permutation de (132)).
6. Composantes connexes de O_n ? (Par exemple à mettre en application de la classification des isométries)
7. Si u endo et $\mathbb{R}[u, u^*]$ la $\mathbb{K}$-algèbr associée à u et u^*. Comment peut-on caractériser le fait qu'elle soit commutative ? A-t-on $\mathbb{R}[u, u^*] = \mathbb{R}[u]$ dans ce cas ? (regarder en dimension 2 pour l'idée ?)

Réponses

1. L'unicité n'est pas garantie. Idée : approcher A par densité avec une suite $O_k S_k$. $\mathcal{O}_n$ est fermé et l'adhérence de $\mathfrak{S}_n^{++}$ est $\mathfrak{S}_n^{+}$. On peut bien obtenir une décomposition (non unique) ainsi.
2. Calcul de racine carrée : c.f algo de calcul de valeurs propres. On construit alors $\sqrt{A}$.
3. Etapes importantes
4. Si il existait un $A \in G \backslash \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, en écrivant $A = OS$ on a $O \in G$ et donc $S \in G$. Si $\lambda_1 > 1$, $\lambda_1^n \to +\infty$ et donc cela contredit la compacité en considérant S^n. Si $\lambda_1 < 1$, alors idem montre que puisque compact fermé et donc contient 0
5. En pratique : montrer que c'est une matrice d'isométrie directe (dans SO_3). La réduire. Produits scalaires vecteurs colonnes puis vérifier que chacun est de norme 1. On calcule ensuite $det(A)$ et on trouve 1. On a donc $A \sim R_\theta$ matrice de rotation. On trouve que l'axe est $vect(n)$ avec $n = (1, 1, 1)$ vecteur normal et on calcule la trace pour trouver θ. On a $2\cos(\theta) + 1 = 2$ d'où $cos(\theta) = 1/2$. On trouve donc θ au signe près, et une fois qu'on oriente le plan avec l'axe $vect(n)$ par exemple, et ensuite on calcule $det(u, f(u), n)$ pour déterminer le signe.

6. Idée : partir d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et la réduire :

$$A \sim \begin{pmatrix} R_1 & & & & & \\ & R_2 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \varepsilon \end{pmatrix} := M$$

On pose $f(0) = I_n$ avec un ε en bas à droite, et $f(1) = M$. On trouve deux composantes : les isométries directes ($\varepsilon = 1$) et indirectes ($\varepsilon = -1$).

7. Elle est commutative ssi u normal $\iff uu^* = u^*u$. Le cas échéant, si on arrive à montrer que u^* polynôme en u, alors automatiquement $u^* \in \mathbb{R}[u, u^*]$ donc on a bien le résultat. En dimension 2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } {}^tA = -A + 2aI_2$$

Idée dans le cadre général : lemme de décomposition des noyaux. Projections sur les sous-espaces = polynômes en l'endo de base.

Motivations

Dans un espace euclidien, les endomorphismes orthogonaux, correspondant aux matrices orthogonales, jouent un rôle important, à commencer par les projecteurs orthogonaux (théorème de projection et calcul de distances, théorème de Pythagore, matrices de Gram) et les symétries orthogonales.
Une autre classe d'endomorphismes remarquables sont les endomorphismes symétriques, associés aux matrices symétriques. Le théorème spectral donne une réduction de ces matrices via les matrices orthogonales, et les applications sont nombreuses (co-diagonalisation et pseudo-réduction simultanée, décomposition polaire, ...). On retrouve les matrices symétriques définies positives dans de nombreux domaines : formes quadratiques non dégénérées, optimisation de fonctionnelles quadratiques...
Plus généralement, les endomorphismes auto-adjoints peuvent être réduits comme les endomorphismes symétriques (ce sont les matrices hermitiennes)

Métaplan :
Cadre : $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, ||\cdot||)$ est un espace vectoriel euclidien.

1. Endomorphismes symétriques et auto-adjoints [GouAl]
   (a) Définitions
      - Définition via le théorème de représentation de Riesz
      - Matrices hermitiennes, matrices symétriques
      - Exemples : Hessienne, ...
      - décomposition $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$ et idem hermitiennes

(b) Réduction et théorème spectral
   - Valeurs propres réelles
   - Stabilité de $F^{\perp}$ par l'adjoint
   - Corollaire : théorème de réduction des auto-adjoints, théorème spectral
   - Application : racine carrée d'une matrice hermitienne définie positive
   - **Décomposition polaire**
   - Application : description topologique de GL_n

2. Endormorphismes orthogonaux [GouAl]

   (a) Définitions, généralités
   - Définition endormorphisme orthogonal, matrice orthogonale
   - Caractérisations
   - Orthonormalisation de Schmidt
   - Application : décomposition QR

   (b) Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales
   - Théorème de Pythagore
   - Théorème de projection orthogonale
   - Réduction des projecteurs orthogonaux et des symétries
   - $s = 2p - id$
   - Dessins en dimension 3

3. Groupes orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ [GouAl] [Per]

   (a) Réduction des matrices de $O_n(\mathbb{R})$
   - Théorème de réduction

   (b) Propriétés de $SO_n(\mathbb{R})$
   - SO_n engendré par les retournements
   - Application : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

* Endormorphismes normaux et Application à la méthode des moindres carrés [Fil]
   - Equation normale
   - Equivalence avec le problème des moindres carrés

Sur le plan : Choses écartées par manque de place : Applications sur le th 45 et la géométrie, et aussi des propriétés topologiques sur SO_3. Il peut être intéressant de le mentionner le jour de l'oral. Dans cette leçon on peut aussi parler de centre, de groupe dérivé, de générateurs, les sous-groupes finis de O_2 ou O_3. Preuve géo diff pour extrema liés / théorème spectral : attention à avoir suffisamment de matière liée à la leçon. Il faut que la partie endo remarquables soit au coeur de la démonstration.

2.161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Rapport du jury 2020 : Cette leçon ne doit pas se restreindre aux seuls cas des dimensions 2 et 3, même s'il est naturel que ceux-ci y occupent une place importante. La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines.
Les candidats peuvent en outre parler de la définition de la distance, de la distance à un sous-espace vectoriel et de déterminant de Gram. Les groupes de similitude peuvent également être abordés.
S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance,et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

Métaplan :
Isométries, théorème de décomposition, classification en dimension 2 et 3. Distances dans un espace affine, matrices de Gram (intérêt : pas besoin de choisir une base, juste à connaître les produits scalaires) et applications à un ou deux calculs de distances (projections).

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

2.162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorith- miques et conséquences théoriques.

09/12 JéZu et Christopher avec Marc Abboud
Questions :

1. Résolution d'un système 3x3 avec Cramer d'abord puis avec un pivot de Gauss
2. En pratique quand est-ce qu'on privilégie les méthodes itératives et quand est ce qu'on préfere le pivot de gauss ?

3. Intersection d'espaces vectoriels définis de manière explicite : $e_1 \Rightarrow ...$
4. Pourquoi le pas est "optimal" ?
5. Convergence : en temps fini ? Polynômial ?
6. Interprétation géométrique du gradient en un point.
7. Quel est l'indice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?
8. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Condition suffisante pour que la solution x de $Ax = b$ soit à coefficients entiers ? Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$?
9. Pour la méthode du gradient, est-ce qu'il vaut mieux que les valeurs propres soient éloignées ou rapprochées ?
10. Si on a r hyperplans $\mathcal{H}_r$ dans E de dimension d, que dire de l'intersection ?
11. Auelles sont les orbites de l'action à gauche des matrices inversibles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$? C'est à dire à quelle condition a-t-on $N = PM$?
12. Même question pour l'action à droite ?
13. Application 28 : détailler.

Réponses :

1. Ohlàlà, ça va plus vite avec le Pivot de Gauss !
2. Méthodes itératives : pour les matrices de grande taille.
3. Résolution d'un système.
4. On a $x_{k+1} = x_k + t_k \nabla f(x_k)$, et ici $\nabla f(x) = Ax - b$ donc $\langle \nabla f(x_{k+1}), \nabla f(x_k) = \langle Ax_{k+1} - b, \frac{1}{t_k}(x_{k+1} - x_k)\rangle$. Donc le minimum de la fonction $t \mapsto f(x_k - t\nabla f(x_k))$ est atteint
5. On peut montrer que si on n'atteint pas x^* à la première étape, on n'a pas un temps fini. (c.f gradient conjugué).
6. C'est le vecteur qui indique la plus grande pente. Il est orthogonal aux lignes de niveaux.
7. $\varphi : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to ??? \in \mathbb{Z}$ est d'image $\{-1, 1\}$ et de noyau $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$
8. Il suffit que M soit de déterminant dans $\mathbb{Z}^\times$, resp $\mathcal{A}$.
9. Conditionnement proche de 1 pour avoir une bonne convergene, et $cond(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$. Il vaut mieux que les vp soient rapprochées.
10. $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{H}_i\right) \geq n - r$. On a égalité ssi liberté (système à r lignes et d colonnes, i.e on cherche le noyau de la forme linéaire associée à l'intersection). Théorème du rang.
11. Pivot de Gauss sur les deux matrices : si on a $M = P_1T_1$ et $M = P_2T_1$ c'est ok. En fait $N \sim M \iff rg(M) = rg(N)$. Mais attention on ne peut pas échelonner (action à droite). Mais si on écrit le pivot de Gauss sous la forme $M = P_1T_1$ et $M = P_2T_2$, si M et N sont de même rang r alors les r premières lignes de T_i forment une base de l'image. La question revient donc à envoyer une famille libre (e_i) de r vecteurs sur une autre famille (f_i) de r vecteurs par changement de base.
12. A droite, on agit sur le noyau. C'est donc lême raisonnement mais avec la dimension du noyau à la place du rang.
13. -

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

2.170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 19/05 - Arnaud Hautecoeur et Léon Le Loir avec Matthieu Romagny
Questions

1. Pourquoi est-ce que c'est important les formes quadratiques ?
2. Et le cas dégénéré ?
3. Soit q une forme quadratique sur E et V son noyau. Préciser la phrase "E induit une forme quadratique sur E/V". Indication : ça veut dire quoi quand $f : G \to H$ morphisme de groupe "passe au quotient" en $G/N \to H$ avec N distingué dans G ?
4. Réduisez $q(x, y, z) = 4xy + 2xz + 2yz$

Réponses

1. Formes quadratiques sur $\mathbb{Z}$: obtenir des résultats en théorie des nombres. Première rencontre : produit scalaire (au lycée)... or is it ? Pythagore au collège !!
   Autres applications : coniques (trajectoires de planètes, quand on pose une lampe sur un mur...)
2. A part le IV), on peut refaire le même plan. On peut se ramener au cas non dégénéré en quotientant par le noyau (la matrice dans une base q-orthogonale a un bloc de 0 et un bloc non nul : c'est la partie non dégénérée).
3. Pour l'indication : il faut vérifier que cela ne dépend pas du représentant choisi. Ici pour q il faut donc vérifier que si x_1, x_2 sont deux représentants de $x \in E/V$, alors $q(x_1) = q(x_2)$. On a $x_1 = x_2 + y$ avec $y \in V = \mathrm{Ker}(q)$. Donc $q(x_1) = q(x_2 + y) = \varphi_q(x_2 + y, x_2 + y) = q(x_2) + 2 \times 0 + 0$ car $y \in \mathrm{Ker}(q)$.

4. On a

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

Remarques générales : Expliquer la place des formes quadratiques avec un peu + de recul (c.f question 1).
Pour creuser l'isotropie : théorème de Witt et géométrie différentielle.

2.171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Réduire la fq $xy + yz + zx$
2. Pourquoi ça s'appelle une conique ? Quel cône ? Est-ce qu'il n'y a pas un autre cône que celui de révolution ?
3. (suite) Quel lien entre le cône isotrope et la forme quadratique ?
4. (Classique de l'agreg interne) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse et A, B, C trois points de l'ellipse. Quelle est l'aire maximale du triangle ABC
5. Classification sous l'orbite non pas du groupe affine mais du groupe des isométries affines ? c.f Audin

Réponses

1. Cas particulier de la réduction de Gauss. C.f Gourdon ou dSP
2. Intersection entre un cône et un plan
3. Rajout de la variable z pour obtenir un polynôme homogène de degré z, Q (donc Q est une forme quadratique en dimension 3) : $Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$. La conique est $\{Q = 0\} \cap \{z = 1\}$. Le cône $\{Q = 0\}$ n'est pas de révolution en général.
4. On fixe B et C. Le gradient de $C \mapsto d(C, [BC])$ est orthogonal à BC. Donc les deux candidats pour C sont les points du cercle qui sont sur la médiatrice de BC et dont la tangente au cercle est orthogonale au gradient. On trouve donc un triangle équilatéral pour le cas du cercle.
   Pour une ellipse : ici en fait ce qui est intéressant c'est que l'orbite du cercle pour l'action du groupe affine sur $\mathbb{R}^3$ affine contient toutes les ellipses. En particulier le quotient des aires est le même ! ! Si une ellipse est de demi-axes a et b, on trouve un rapport de $\frac{3}{16}\sqrt{ab}$.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

Autres remarques : on peut parler de matrices de Gram aussi. Plan léger en coniques.
Il ne faut pas faire l'impasse sur les coniques. Il y a beaucoup d'applications : mirroirs de télescopes = paraboloïdes de révolution, orbites de planètes = coniques.
Omissions regrettables : notion d'excentricité et classification métrique des coniques (par opposition à la classification affine) avec l'action du groupe des isométries affines (lien avec les orbites de planètes). Groupe orthogonal associé à une forme quadratique. Voir Perrin pour groupe orthogonal, sinon Perrin.
De manière générale, il faut beaucoup parler d'actions de groupes.

2.181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 09/02 - Boammani Lompo et Vincent Malot avec Lionel Fourquaux
Développement présenté : théorème de carathéodory.
Questions

1. C'est quoi $M = t_1A_1 + \cdots + t_nA_n$?
2. Soit ABC un triangle non plat et α, β, γ les angles. Soit O le centre du cercle circonscrit. Ecrire O comme barycentre de A, B, C. (autre exos possibles avec d'autres points remarquables et en fonction des longueurs des côtés au lieu des angles).
3. Que la notation $M = \sum t_iA_i$ vous évoque-t-elle ? (les points pondérés.) Peut-on mettre une structure sur l'ensemble des points pondérés (c'est à dire donner un sens à cette "multiplication" et à cette "somme") ?
4. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui préserve les distances i.e $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$. Montrer que pour tous A, B, l'image par f d'un barycentre de A et B est le barycentre de $f(A)$ et $f(B)$ avec les mêmes poids.
5. Soit A un convexe et $x \in \partial A$. On considère les hyperplans qui séparent x de l'intérieur de A. On dit que x est un sommet de A si l'intersection de ces hyperplans séparants est réduite à x. (cela peut être une droite par exemple si A polyèdre, etc). Montrez que l'ensemble des sommets de A est au plus dénombrable.

Réponses

1. Cela dépend de l'espace vectoriel dans lequel on se place. On peut plutôt noter $Bar((t_1, \dots, t_n), (A_1, \dots, A_n))$.
2. On utilise le théorème de l'angle au centre pour remarquer que O est situé aux 2/3 des médiatrices. On écrit en coordonnées barycentriques t_1, t_2, t_3 les coordonnées de O. On a $t_1\vec{OA}.\vec{OB} + t_2\vec{OA}.\vec{OC} + t_3 r^2 = 0$ d'où
$$\begin{cases} t_1\cos(2\gamma) + t_2\cos(2\beta) + t_3 &= 0 \\ t_1 + t_2\cos(2\alpha) + t_3\cos(2\gamma) &= 0 \\ t_1\cos(2\beta) + t_2 + t_3\cos(2\alpha) &= 0 \end{cases}$$
d'où $(t_1, t_2, t_3) = (\sin(2\alpha), \sin(2\beta), \sin(2\gamma))$. On peut aussi utiliser un déterminant comme $\sin(\vec{OA}, \vec{OB}) = \det(\vec{OA}, \vec{OB})|\vec{OA}||\vec{OB}|$
3. On se rend compte qu'il faut considérer + que juste les points pondérés. On considère l'ensemble $\mathcal{Z} \times K^\times \cup E$ (réunion disjointe). On définit $(A, \lambda) + \vec{u} = (A + \vec{u}, \lambda,$ $(A, \lambda) + (B, \lambda) =$ (valeur constante de la fonction vectorielle de Leibniz, $\lambda + \mu$). L'élément neutre serait le vecteur nul. On a un espace vectoriel, dans lequel la notation $\sum t_i A_i$ a bien un sens. L'espace affine initial $\mathcal{E}$ apparaît comme l'ensemble des points pondérés par 1. Ce serait un sous-espce affine de l'espace vectoriel qu'on vient de construire.
4. Soit $M = Bar((A, B), (\lambda, \mu))$. On a par hypothèse $\lambda MA^2 + \mu MB^2 = \lambda f(M)f(A)^2 + \mu f(M)f(B)^2$. On a une seconde fonction scalaire de leibniz donnée par $\lambda M' f(A)^2 + \mu M' f(B)^2$.
5. On se place dans $\mathbb{Q}^n$. On introduit un cône en prenant les demi-droites orthogonales à un hyperplan séparant. A chaque élément de $\mathbb{Q}^n$ on associe au plus un tel sommet x. c.f Berger pour la solution.

Métaplan :
Cadre : On se donne un espace affine $\mathcal{E}$ de direction un $\mathbb{R}-$ev de dimension finie E.

1. Barycentres et coordonnées barycentriques
   (a) Barycentres dans un espace affine
      - Définitions
      - Isobarycentre
      - Exemple du triangle, du cercle, du carré

   (b) Coordonnées barycentriques
      - Définition
      - Coordonnées barycentriques du triangle
2. Convexité [GouAn] chap5 et p55 [Tau] chap5
   (a) Définitions et premiers résultats
      - Définition
      - Exemple : épigraphe d'une fonction convexe
      - Intégration complexe dans un convexe (formule de Cauchy) ?
      - Propriétés de l'adhérence, de l'intérieur d'un convexe[GouAn] p55 (voir "Carathéodory")

   (b) Enveloppe convexe [TauGeo] [GouAn] chap5 et p55
      - Définition
      - $Conv(A)$ vu comme ensemble des combinaisons linéaires [TauGeo]
      - Diamètre de $Conv(A)$ [TauGeo]

   - **Théorème de Gauss-Lucas et applications**
   - Théorème de Carathéodory + application [GouAn] p55
3. Fonctions convexes [GouAn] chap III)3.
   (a) Définitions, caractérisations
   - Définition
   - Inégalité des 3 pentes
   - Caractérisations de fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables
   - Application aux extrema de fonctions / optimisation

   (b) Inégalités de convexité
   - Inégalité de convexité logarithmique appliqué au déterminant
   - **Ellipsoïde de John Loewner**

Présentation trop linéaire. "Après on va parler des fonctions convexes" : "après" n'est pas une articulation satisfaisante. Par exemple : "L'épigraphe étant une partie convexe pour une fonction convexe, on arrive naturellement à la notion de fonction convexe."
Conseil général : avoir en tête l'argument clé qui permet de finir le développement au cas où on finisse trop tard, mais aussi avoir en réserve quelque chose (application, exemple, ...) dans le cas où on finisse trop tôt. (ici : 10min)
Attention l'image de $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ n'est pas un sous-espace affine !
Plan : bien. Partie sur les fonctions convexes : bonne idée. Il ne faut pas non plus changer la nature de la leçon (il ne faut pas en mettre trop ; une partie entière serait le maximum).
Développement : un peu plus court : rajouter un petit quelque chose.
Questions : très bien.

2.190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Rapport du jury 2020 :
Leçon du 27/01 - Margot Turcan et Tiphany Chenais avec Matthieu Romagny
Développements : Nombre de polynômes irréductibles de degré donné dans $\mathbb{F}_p$ (dév choisi), Dénombrement et p-groupes.

Questions

1. Comment on montre qu'il existe toujours un polynôme irréductible de degré d donné dans $\mathbb{F}_p$?
2. Que se passe-t-il pour le binôme de Newton lorsque l'anneau n'est pas commutatif ?
3. Comment utiliser les nombres de Bell pour montrer l'appli 45 ?
4. Dans quel contexte peut-on avoir envie de considérer la série génératrice d'une suite ?
5. Comment voir $\mathcal{A}_n$ comme $\mathfrak{S}_n / \operatorname{Ker}(\varepsilon)$?
6. Est-ce que l'appli 55 reste vraie par exemple pour p^3 ? Essayez avec $\mathrm{SL}_3 \mathbb{F}_p$. On peut regarder aussi les matrices 3×3 unipotentes.
7. Question musicale : on utilise les 7 notes de la gamme pour composer des morceaux de musique, et on compose des chansons = des mots musicaux d'une certaine longueur, obtenus par répétition d'un motif élémentaire (un motif n'est pas lui-même répétition d'un motif plus petit). Trouver le nombre de motifs de longueur n. Indication : commencer par compter toutes les chansons de taille n puis utiliser une méthode d'inversion.

Réponses

1. c.f formule du développement.
2. Donner un contre exemple de matrices qui ne commutent pas et montrer $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.
3. Cassini algèbre 1
4. Ex : récurrence de Fibonacci : éd diff d'ordre 2. Suites récurrentes linéaires <-> Séries entières
5. En fait c'est faux car $\mathcal{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$.
6. Pour $\mathrm{SL}_3\,\mathbb{F}_p$, on regarde les $p-$Sylow.
7. $C_n :=$ nombre de chansons de longueur n. On a $C_n = 7^n$. On remarque que $7^n = \sum_{d|n} B_d$ où B_d est le nombre de motifs irréductibles de taille d.
   Par formule d'inversion de Möbius : $B_n = \sum_{d|n} \mu(d) 7^{n/d}$

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

Autres remarques : Remarque 6 du plan : pas tout à fait. C'est "il existe une bijection".
Dans le rapport, ils demandent de parler de fonctions génératrices.

2.191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Rapport du jury 2020 : (énorme pavé) en gros : leçon très libre, une difficulté étant de bien choisir ce dont on veut parler pour structurer correctment son plan.

Leçon du 21/04 - Fabrice Etienne et Julien Duron avec Lionel Fourquaux.

Motivations

Plan centré sur l'algèbre linéaire : déterminants et calculs d'aires, volumes, distances, et construction du produit vectoriel. Réduction aussi : homothéties, projections, symétries, rotations, isométries vectorielles, ...

Questions

1. Quelles sont les applications qui préservent les barycentres ? (candidat : "les isométries affines" => Indication : et les homothéties ?) Quelles sont les applications naturelles d'un espace affine ?
2. Est-ce qu'on peut engendrer $\mathcal{S}_4$ avec des $3-$cycles ou des $4-$cycles construits par isométries sur le cube ?

3. Soit F une partie non vide et bornée du plan (une figure). Soit G le groupe des déplacements qui conservent F. Montrer que G est commutatif.
4. Points constructibles ? (th 26)

Réponses

1. Ce sont exactement les applications affines.
2. Juste avec $3-$cycles, on obtient $\mathcal{A}_4$. Si on trouve un $4-$cycle en plus, on obtient un autre sous-groupe strictement plus gros que $\mathcal{A}_4$ qui est déjà d'incice 2 (donc plus gros sous-groupe), donc on obtient $\mathcal{S}_4$.
3. Soient $g_1, g_2 \in G$. On pose $h := g_1 \circ g_2 \circ g_1^{-1} \circ g_2^{-1}$. Si il y a un point fixe (?), la partie linéaire de h (c'est une loi de groupe) est dans $SO_2(\mathbb{R})$ qui est commutatif. Donc $\vec{h} = id_F$.
   Soit $x \in F$. On considère $h^n(x)$. La distance entre x et $h^n(x)$ est nd où d est la distance entre x et $h(x)$. Donc par hypothèse de bornitude, $d = 0$ et donc $h(x) = x$.
4. 3 situtations : intersection entre 2 cercles : ok. Intersection d'une droite et d'un cercle ? Intersection de 2 droites ?
   Si on a 4 points, et que l'on cherche à construire (si c'est possible) une 5e point comme une intersection de droites : ...

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

Remarques : sur le plan : OK.
Sur le développement : attention aux questions que l'on peut nous poser. Ne pas se lancer dans quelque chose que l'on ne sait pas justifier.
Pour Gram : il faut préciser l'interprétation en terme de volume.
Pour le compas : compas traçant = on peut tracer le cercle de centre A passant par B. Compas transportant = on peut tracer le cercle de centre A et de rayon BC. (en fait il y a équivalence).
On aurait pu poser des questions sur le contre exemple 22.

3 Métaplans d'analyse

3.201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :
Questions

1. Montrez qu'une fonction $f \in \mathcal{C}_c^0$ est uniformément continue. (i.e redémontrez Heine)
2. Montrez le théorème de Dini : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}^0([0,1]$ qui converge simplement vers f continue. Montrez que la convergence est uniforme

Réponses

1. On raisonne par l'absurde (on extrait des suites provenant de la traduction séquentielle de la non-uniforme continuité).
   Autre preuve : on extrait un sous-recouvrement fini (à ε fixé) de $supp(f) \subset \bigcup_{x\in K} \mathcal{B}(x, \delta_k)$ et on prend $\delta = min(\delta_k)$ ce qui donne un module d'uniforme continuité.

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

Remarques :

3.203 Utilisation de la notion de compacité.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Quelle est la différence entre espace compact et complet ?

Réponses

1. Compact implique complet, mais l'inverse est faux. De plus, précompact + complet implique compact.

Motivations

Métaplan :
Cadre : On se donne (E, d) un espace métrique

1. Compacité dans les espaces métriques

(a) Compacité au sens de Borel-Lebesgue
    - Définition compacité
    - Exemples de compacts : segments, boules
    - Exemples de non compacts : $\mathbb{R}$, les espaces de fonctions, ...(en fait tout EVN non nul)
    - Intersection de compacts, réunion finie de compacts [GouAn] p28

(b) Caractérisation dans le cas métrique et premiers exemples
    - Caractérisation par Bolzano-Weierstrass, caractérisation séquentielle

2. Compacité et fonctions continues

(a) Compacité et fonctions continues [GouAn]
    - L'image d'un compact est compact
    - Théorème des bornes atteintes
    - Théorème de Heine
    - Application : fonction continue périodique est uniformément continue
    - Si f bijective continue sur un compact alors c'est un homéo
    - Corollaire : théorème de la bijection v2 [GouAn]

(b) Liens entre complétude et compacité, théorèmes de points fixes
    - Compact implique complet
    - Suite de cauchy n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence converge
    - Application : théorème de Riesz-Fischer
    - Toute suite de Cauchy bornée converge
    - Théorème du point fixe
    - Théorème du point fixe, version compact
    - Contre-exemple sans compacité [GouAn] p35
    - Théorème du point fixe, version itérée
    - Application : Cauchy-Lipschitz

(c) Compacité dans les espaces de fonctions
    - $\mathcal{C}^0(K)$ est complet pour la norme uniforme lorsque K compact. [ZuQu]
    - Définition équicontinuité
    - Théorème d'Ascoli
    * Théorème de Montel

3. Compacité dans les espaces vectoriels normés

(a) En dimension quelconque
    - Théorème de Riesz
    - Exemple de $x \mapsto x^n$ qui n'a aucune sous-suite convergente dans $\mathcal{C}^0([0,1]), ||\cdot||_\infty$
    - Exemple d'un compact pour une norme qui n'est pas compact pour une autre norme : $K = \{x \mapsto (n+1)x^n\}$ pour la norme uniforme (pas compact) et pour la norme 1 (compact, l'intégrale c'est toujours 1) sur $\mathcal{C}^0([0,1])$

(b) En dimension finie
   - Caractérisation de la continuité des applications linéaires
   - Exemple : $U_n(\mathbb{C})$ (matrices unitaires) est compact
   - Application : décomposition polaire
   - **Ellispoïde de Loewner**

(c) Compacité dans $\mathbb{R}$ [GouAn]
   - Théorème de Rolle
   - Applis : EAF, Taylor-Lagrange
   - Appli de l'ETL : calcul de l'erreur de consistance pour le schéma 1D $u'' = f$ avec conditions de Dirichlet
   - **Théorème de Weierstrass par la convolution**
   - Application : si $\displaystyle\int x^n f(x) = 0\ \forall n$ alors $f = 0$

Autres remarques : si f convexe sur C convexe compact, alors

3.204 Connexité. Exemples et applications.

Références : [QuTo] chapitre 4, [GouAn] chapitre I.3) et V.3), [Tau] chapitre 4, [MnTi] chapitre 1
Rapport du jury 2020 :
Métaplan[PARTIE 3 A ETOFFER] :
Cadre : Espaces métriques.

Motivations

La notion de connexité cherche à formaliser la notion intuitive d'être d'un seul tenant, d'un seul morceau.

1. Connexité et continuité
   (a) Connexité, connexité par arcs
   - Déf (eqv) connexité et CPA [QuTo] p 113 ou [GouAn] p38-39
   - CPA $\Longrightarrow$ connexe
   - exemples simples : singletons, intervalles, espaces vectoriels, convexes (boules)
   - Contre-exemple de l'adhérence du graphe de $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sin(\dfrac{1}{x})$ qui est $f(\mathbb{R}_+^*)$ ou exo 5 p 44 du [GouAn]
   - Si $A \subset B \subset \overline{A}$ avec A connexe alors B connexe
   - Réunion de connexes disjoints

   (b) Liens avec la continuité
   - L'image par une fonction continue d'un connexe est connexe
   - Caractérisation des espaces métriques connexes [GouAn] prop 3 p39
   - Les connexes de $\mathbb{R}$ = les intervalles

- TVI

(c) Composantes connexes [GouAn] p41
- Définition
- CP sont fermées
- Relation d'équivalence, partition de l'espace

2. Connexité dans les espaces de matrices [MnTi]
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ CPA
- Deux composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$
- Corollaire : $\{$Matrices (complexes) de rang $r\}$ est CPA
- **Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$** [XENSAl3] p67

3. Passage du local au global

(a) En analyse réelle
- TIL [GouAn] p341
- Application [Laf] p25
- Application : Lemme de Morse
- TIG [GouAn] cor4 p344

(b) En analyse complexe [Tau] chap 4
- Principe du prolongement analytique - 4.2.1 p52
- Principe des zéros isolés - 4.3.3 p53
- Caractérisation fonctions holomorphes constantes - 5.2.6 p61
- Formule de Cauchy pour les convexes - 6.4.7 p77
- Indice d'un lacet - 10.3.3 et 10.3.5 p134

3.205 Espaces complets. Exemples et applications

Rapport du jury 2020 : Métaplan :
Cadre : (E, d) est un espace métrique

1. Espaces métriques [GouAn], [QuTo] chap 5

(a) Suites de Cauchy et complétude
- Déf suites Cauchy
- Cauchy implique bornée
- Suites convergentes
- Cauchy + valeur d'adhérence = CV
- Espaces complets : $(\mathbb{R}, |.|)$, pas complets : $(\mathbb{Q}, |.|)$, $\mathcal{C}^0, ||\cdot||_{L^2}$, $\mathbb{R}[X], ||\cdot||_\infty$
- Prop 7 à 9 p 29 [GouAn] : fermé d'un complet, produit de complets, fermés emboîtés.
- Compact => complet (en particulier dim finie implique complet)

(b) Compacité et continuité

- Prolongement d'applications uniformément continues [QuTo] chap5 ThI.8
- Application : Fourier-Plancherel prolongé de $\mathcal{S}$ à L^2

(c) Théorème du point fixe et conséquences

- Théorème du point fixe B-P [Rou] ou [QuTo]
- Contre-exemples [QuTo]
- Applications équations fonctionnelles [QuTo] chap 5 II.3
- **Théorème de Cauchy-Lipschitz global**

2. Espaces de Banach

(a) Définition et exemples

- Déf Banach
- Espaces de fonctions : $\mathcal{C}^0(I)$ avec I segment et la CVU
- **Théorème de Riesz-Fischer**
- -> Exemples : les L^p, $p \geq 1$
- Contre-exemple : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a des semi-normes et métrisable complet mais pas Banach (on peut remplacer $\mathcal{S}$ par un $\mathcal{C}^k$ c.f [ZuQu] chap VII.1)e))

* Le dual de L^∞ est L^1 (application : représentation des fonctions lipschitziennes)

(b) Théorème de Baire et applications [Bre]

- Théorème de Baire
- Théorème de Banach-Steinhaus
- Corollaire suites d'AL continues qui CVS
- Appli : Série de Fourier qui diverge
- Théorème de l'application ouverte
- Conséquence : $T(U)$ ouvert pour tout ouvert U
- Application : isomorphisme de Banach

* Théorème du graphe fermé

3. Espaces de Hilbert

(a) Définition, propriétés générales [GouAn]

- Définition d'un Hilbert, de l'orthogonal d'une partie
- Théorème de projection sur un convexe fermé non vide
- Application au TPO et au calcul de distance à un sev de dim finie
- Théorème de Riesz
- Application : gradient, adjoint
- Conséquence : isomorphisme canonique $ev : x \in H \mapsto \langle x, \cdot \rangle \in H'$ entre un Hilbert et son dual
- Propriétés de l'orthogonal [GouAn]
- Critère de densité
- Inégalité de Bessel, égalité de Parseval

- Bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux) [ObA]

(b) Les espaces l^2 et L^2

- Définition de l^p, exemple de $1/n$ qui est dans l^2 mais pas dans l^1 (par contre dans l^q pour tout $q \geq 2$), inclusions de l^p
- Séries de Fourier [ZuQu] à remplir selon la place...
- Isomorphisme L^2 et l^2

(c) Application à la résolution d'EDP [Berth]

- Théorème de Lax-Milgram
- Application à un problème avec conditions de Dirichlet

* H_0^1

3.207 Prolongements de fonctions. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 : Ne pas hésiter à commencer avec des exemples simples comme sinc. Beaucoup de candidats sont juste sur les résultats de prolongement $\mathcal{C}^k$. On peut parler de prolongement analytique $(\zeta, \Gamma, \dots)$, de Fourier dans L^2 ou dans $\mathcal{S}$. On peut parler de Hahn-Banach. On peut enfin envisager de parler du problème de Dirichlet.
Questions

1.

Réponses

1.

Métaplan :
Cadre : Assez varié d'une partie sur l'autre...

1. Prolongements de fonctions de la variable réelle

(a) Prolongements continus

- Définition
- sinc

(b) Prolongements $\mathcal{C}^k$

- Définition
- Toujours sinc
- Théorème de prolongement

(c) Prolongements de solutions d'EDO

- Cadre : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$
- Théorème de Cauchy-Lipschitz
- Théorème d'explosion en temps fini + exemple

2. Prolongements dans des espaces fonctionnels

(a) EV de dimension infinie

- Prolongement sur un dense d'un espace métrique complet
- Théorème d'Ascoli

- Théorème de Hahn-Banach

(b) Transformée de Fourier dans L^2

- Définition dans L^1
- Définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

DEV Isométrie dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

DEV (suite) Fourier-Plancherel

3. Prolongement analytique [Rud]

(a) Singularités isolées [Rud]

- Zéros isolés
- Théorème de prolongement de Riemann 10.20 [Rud]
- Singularités isolées et caractérisations
- Exemple du calcul de l'intégrale de Gauss en passant par l'analyse complexe
- exemple de $\exp(-1/x^2)$ prolongement $\mathcal{C}^\infty$ mais pas analytique.

(b) Un exemple : la fonction ζ de Riemann [131D]

DEV c.f [131D] page 514.

3.208 Espaces vectoriels normés, applications continues. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Disposez-vous d'un exemple précis de fonction $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ qui n'est pas égale à sa série de Fourier ?
2. Soit $E := \mathbb{R}^\mathbb{N}$ muni de $||\cdot||_\infty$. Trouvez une suite (T_n) de $\mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $u \in E$, $||T_n(u)|| < +\infty$ et $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||$
3. Donnez l'idée de la preuve du théorème de Baire.
4. Donnez la norme subordonnée à la norme infini de la matrice $I_2 + E_{1,2}$. Même question avec la norme 1.
5. Montrez qu'un espace vectoriel normé de dimension finie est complet. En fait, montrez que $\mathbb{R}^n$ est complet.
6. Existe-t-il une norme matricielle qui est invariante par conjugaison par des matrices inversibles ?
7. Existe-il deux matrices A, B telles que $AB - BA = I_n$? Deuxième question (question ouverte, pas forcément une question d'agreg, plus de culture) : Existe-il un Banach E et $A, B \in \mathcal{L}(E)$ des opérateurs continus tels que $AB - BA = id_E$? ($\mathcal{L}(E)$ muni de la norme subordonnée)

Réponses

1. Contre-exemple de Dubois-Raymond, c.f [ZuQu] p.86 (5e édition)
2. On pose $(T_n(u))_{k\in\mathbb{N}} := ku_k$ si $k \in [\![0, n]\!]$ et 0 sinon. $||T_n(u)||_\infty = \sup\limits_{k\in[\![1,n]\!]} ku_k \leq n \sup\limits_{k\in[\![1,n]\!]} u_k \leq n\,||u||_\infty$, d'où $||T_n|| = n$ et $||T_n(u)|| \leq N\,||u_n||$ avec u_n nulle pour $n \geq N$.

3. On montre que tout ouvert non vide rencontre $\bigcap_n O_n$. Soit U un ouvert de (X,d) non vide. Comme O_1 est dense dans X, $U \cap O_1 \neq \emptyset$. Donc il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(x_1, r) \subset U \cap O_1$. Or cette boule est ouverte donc $\mathcal{B}(x_1, r) \cap O_2$ est non vide : on trouve un x_2 et un r_2, etc...
4. On a $||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_j |a_{i,j}| = 2 = ||A||_1$ = max et somme mais à l'envers. ¨Pour la norme 2, $||A||_2^2 = \rho(A^*A) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
5. Cela revient à montrer que toutes les normes en dimension finie sont équivalentes, car on sait que $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie est complet. On se donne donc une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$. D'une part par inégalité triangulaire, pour tout x on a en notant $C := \max(||e_i||)$ une majoration $||x|| \leq nC\,||x||_\infty$. Pour l'autre sens, on remarque que $id : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ est continue sur la sphère pour $||\cdot||_\infty$ qui est compacte, donc est bornée et atteint ses bornes. On obtient ainsi l'autre inégalité.
6. On cherche une norme telle que $||PAP^{-1}|| = ||A||$ pour toutes matrices A et P (avec P inversible). Par densité et continuité, on cherche cela pour A, P matrices quelconques. En dimension deux, on voit que ce n'est pas possible avec $E_{1,2} := A$ et $E_{1,1} := B$ qui vérifient $AB = 0$ et $BA = A \neq 0$.
7. Non. (la trace!!)
Pour les opérateurs : par récurrence on montre $A^nB - B^nA = nA^{n-1}$ et donc en passant à la norme subordonnée, $n\,||A^{n-1}|| \leq 2\,||A^{n-1}||\,||B||\,||A||$ et donc puisque A^{n-1} est non nulle, $n \leq 2\,||B||\,||A||$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est contradictoire. En physique, on doit donc réaliser les incertitudes par des opérateurs non bornés / non continus (incertitudes = font souvent intervenir des quantités de la forme $AB - BA = \bar{h}I$ par ex).t

Motivations

Les espaces vectoriels normés sont un cadre idéal pour l'analyse. Munir un espace vectoriel d'une norme (par ailleurs intrinsèque en dimension finie) permet en effet une manipulation agréable des notions de continuité, d'ouverts et fermés, et permet ainsi l'obtention d'une foule de résultats : théorème de Baire et applications dans les espaces de Banach (sans parler de théorie spectrale et d'opérateurs compacts...), critères de densité, transformation de Fourier, bases hilbertiennes dans les espaces de Hilbert...
Contrairement au cas de la dimension finie, des normes différentes sur un même espace peuvent donner des topologies qui n'ont rien à voir. Pour préciser cela, on peut bien sûr penser à la complétude : beaucoup de résultats (théorèmes de projection dans les Hilbert, théorème de Baire dans les Banach) sont mis en défaut sans complétude, ce qui montre l'importance du choix de la norme en dimension infinie.

Remarque perso : éviter les questions de dualité dans les Banach si on veut éviter le théorème de Hahn-Banach... Métaplan :
Cadre : On considère $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé (EVN) sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Premières notions sur les espaces vectoriels normés
   (a) Définitions de topologie dans les E.V.N [TE1MP] [GouAn]
      - Définition parties fermées, ouvertes, adhérence, intérieur

- Exemples dans $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, ... (GL_n, matrices scalaires, polynômes de degré $\leq n$, ...)
- Un sev ouvert est l'espace entier
- Caractérisation séquentielle de l'adhérence
- Définition normes
- Exemples de normes matricielles subordonnées + règles de calcul (c'est dans le rapport) [Fil]
- Définition compacité
- $[0,1]$, les boules fermées de $\mathbb{R}^n$
- Caractérisation séquentielle
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Théorème de Riesz
- Exemple de la sphère unité dans $\mathbb{R}[X]$ pour $||\cdot||_\infty$ avec la suite X^n
- Théorème de Weierstrass ?
- Densité
- Exemple GL_n ou matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$

(b) Applications linéaires

- Caractérisations de la continuité
- Exemples d'applications linéaires : en dimension finie, la transformée de Fourier, la dérivation de polynômes, l'espérance en probas, la différentielle, ...
- Norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E)$
- Exemple [GouAn] p49 avec $||u|| < 1$ et inversion de $id - u$

(c) Cas de la dimension finie [TE1MP] chap 4 et 6

- Equivalence des normes
- Conséquence : topologie intrinsèque (fermés, ouverts, continuité, densité, ...)
- Conséquence : convergence via les coordonnées
- Exemple valeurs (optimales ?) pour les normes $1, 2, \infty$ sur $\mathbb{R}^n$ [TE1MP]
- Contre-exemple normes non équivalentes [TE1MP] ou à la main avec $x \mapsto x^n$ sur $\mathcal{C}^0([0,1])$ pour la norme infini et des normes L^p

2. Espaces de Banach [Bre] [Rud]

(a) Premiers exemples et résultats

- Définition
- Exemples de Banach
- Théorème de prolongement sur un dense dans un Banach [Pom]

(b) Théorie de Baire et applications

- Théorème de Baire
- Théorème de Banach-Steinhaus

- Construction d'une fonction continue nulle part égale à sa série de Fourier
- Théorème de l'application ouverte
- Théorème d'isomorphisme de Banach

(c) Théorème du point fixe et applications (facultatif)

- Théorème du point fixe de Banach-Picard
- Application : théorème de Cauchy-Lipschitz
- Application : les courbes intégrales d'une EDO ne se croisent pas

(d) Espaces fonctionnels C^k

- Topologie sur $C^k(\mathbb{R})$ de CVU tout compact
- **Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $C^k(\mathbb{R})$ (pour la norme CVU tout compact toute dérivée)**
- Suivant la place on peut rajouter la densité dans L^p aussi...
- Application : f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ ssi $\exists g \in L^\infty$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(x)dx$ (utilise la théorie des distributions c.f [HirLac])

3. Espaces de Hilbert

(a) Résultats généraux

- Définition
- Théorème de projection sur un convexe fermé
- Contre-exemple
- Applications : polynômes de meilleure approximation
- Théorème de projection orthogonale + distance à un sev [TE1MP]
- Théorème de Riesz
- Isomorphisme canonique via Riesz entre E et E'
- Application : Définition de l'adjoint, du gradient
- Critère de densité dans un Hilbert

(b) Transformée de Fourier dans le Hilbert L^2

- Def base hilbertienne
- TF sur L^1 convention avec $e^{-2i\pi x\xi}$
- Suivant la place : propriétés de la TF (dérivation, convolution)
- Calcul de la TF de la gaussienne, du sinus cardinal
- **Théorème de Fourier-Plancherel**
- Application au calcul de l'intégrale de dirichlet $\int_0^{+\infty} sinc$ [Ber]

3.209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples.

Rapport du jury 2020 : On peut parler de Taylor (oui) mais ne pas en faire le point central. Approximation par convolution, approximation par des polynômes orthogonaux, ...

Questions

1. Quels sont les points d'interpolation des polynômes de Tchebychev ?
2. Produit de convolution : en probabilités dans quel contexte apparait-il ?
3. Où apparaît $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$?
4. Version dans $\mathbb{R}^d$ pour Weierstrass ?
5. Pourquoi on n'a pas densité de $\mathcal{D}$ dans L^∞ ?
6. Calcul de $\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]}$
7. Montrer que $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}),\ f * g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Réponses

1. Ce sont les $cos(\theta)$. Cela provient de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
2. Dans l'indépendance : pour X et Y des v.a.r à densité f et g, si X et Y sont indépendantes alors $f * g$ est la densité de la loi de $X + Y$. (on peut aussi définir une convolution de mesures qui permet de s'affranchir des densité).
3. Dans les distributions.
4. Pas sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, mais (unformément) sur des pavés avec des polynômes à plusieurs variables.
5. Si on a une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui CVU, alors f est nécessairement continue. En fait si c'était dense, toute fonction L^∞ serait dans la classe d'une fonction continue comme limite uniforme d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la norme sup essentiel (qui est la norme uniforme sur cet espace). Une indicatrice telle que l'indicatrice de $[0, 1]$ n'a pas de représentant continu (sinon elle serait égale presque partout à une fonction continue et donc serait continue, ce qui n'est pas le cas) donc c'est faux.
6. On obtient un chapeau (affine par morceaux) entre 0 et 2 avec le pic en 1 de hauteur 1.

Références : Gourdon pour les séries de Fourier et Taylor et Lagrange. Brézis pour le reste.

Motivations

Les fonctions régulières ($\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ voire développable en série ou polynômiales) sont des fonctions dont on connaît bien les propriétés, et que l'on peut manipuler facilement : dérivation, intégration sur un segment, théorème des bornes atteintes... C'est pourquoi il peut être intéressant d'approcher des fonctions moins régulières (L^p par exemple) par de telles fonctions.
L'interpolation de Lagrange (fin 18e) et le théorème de Weierstrass (fin 19e) sont des résultats emblématiques d'approximation de fonctions (bien que l'interpolation de Lagrange ne fournisse pas une approximation uniforme satisfaisante telle quelle).
Un autre espace intéressant est $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ car il est dense dans beaucoup d'espaces fonctionnels.

Métaplan :
Cadre :

1. Interpolation et approximation par des polynômes
   (a) Approximation locale et formules de Taylor [TE1MPSI] chap 13
      - f dérivable ssi f admet un DL en 0 à l'ordre 1
      - Formule de Taylor avec reste intégral
      - Application : lemme dans le lemme de Morse ?
      - Formule de Taylor-Young
      - Développements limités usuels
      - Application : approximation des petits angles dans le pendule simple ?
   (b) Interpolation polynômiale [Fil]
      - Théorème d'interpolation de Lagrange
      - Phénomène de Runge
      - Polynômes orthogonaux
      - Polyômes de Tchebychev
   (c) Théorème de Weierstrass
      - **Théorème de Weierstrass par la convolution**
      - Application : $\mathbb{R}[X], ||\cdot||_\infty$ n'est pas fermé
      - Application : $\forall n \langle f, X^n \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ [TE1MP]
2. Approximation par séries de Fourier [ZuQu] [GouAn]
   (a) Coefficients de Fourier et théorèmes de convergence
      - Définition coefficients de Fourier
      - Lemme de Riemann-Lebesgue
      - Cas $\mathcal{C}^k$
      - Définition et expression du noyau de Féjér
      - Théorème de Féjér
      - Contre-exemple Banach-Steinhaus
      - Définition et expression du noyau de Dirichlet
      - Théorème de Dirichlet
   (b) Séries de Fourier dans L^2 et conséquences
      - Produit scalaire et définition du "L^2 Fourier" (intégrale sur $[0, 2\pi]$)
      - Inégalité de Bessel
      - Formule de Parseval
      - Base hilbertienne + isomorphisme l^2 et L^2
      - Conséquences : [GouAn] p260 : $c_n(f) = 0 \Rightarrow f$ nulle, CVU entraîne S égale à f.
      - Conséquences [ZuQu] (Densité polynômes trigonométriques, (la limite simple est f si existence, si CVN alors égalité), cas $\mathcal{C}^1_{pm}$ via Césaro)
      - Conséquence $\mathcal{C}^1_{pm}$ par Dirichlet
3. Approximations de fonctions L^p

(a) Approximation par convolution

- Existence de fonctions C infini à support compact, de fonctions plateaux
- Convolution $L^1 * L^1$
- Dérivée d'un produit de convolution
- Régularisation par convolution
- **$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$**
- Application : représentation des fonctions lipschitziennes

(b) L'espace de Hilbert L^2 et polynômes orthogonaux

- Def base hilbertienne
- Définition polynômes orthogonaux
- **Base hilbertienne de polynômes orthogonaux**

3.213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Questions de théorie de la mesure sur le développement Radon-Nikodym
2. Théorème de Riesz : donner les idées principales de la preuve.
3. Soit $H := \mathcal{C}^0([0,1])$ muni du produit scalaire L^2 et $\phi : f \mapsto \int_0^{1/2} f(x)dx$. ϕ s'écrit-elle comme $\langle g, \cdot\rangle$?
4. Déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^1 |x^3 - (ax^2 + bx + c)|^2 dx$ soit minimale.

Réponses

1. /
2. Utiliser le corollaire du théorème de projection sur l'hyperplan $F = \mathrm{Ker}(\phi)$ pour travailler sur $F \oplus F^\perp = H$. On cherche un $x_\phi(\lambda y_0)$ défini sur $F^\perp = vect(y_0)$ qui vérifie $\langle x_\phi, y\rangle = \phi(y)$. On pose $x_\phi(y) := \dfrac{\phi(y_0)}{\langle y_0, y\rangle} y_0$ qui se trouve être constant sur $F^\perp$ et qui vérifie $\langle x_\phi, y\rangle = \phi(y)$ sur $F^\perp$, et donc sur H car ϕ est nulle sur F.
3. On remarque que H n'est pas complet ici. Par contre ϕ est continue pour la norme L^2 par Cauchy-Schwarz : $|\phi(f)| \leq \int_0^{1/2} |f(x)|dx \leq \left(\int_0^{1/2} f(x)^2 dx \int_0^{1/2} 1^2 dx\right)^{1/2} \leq ||f||_2$. Pour autant, si on avait $\phi(f) =\leq f_0, f\rangle$ alors on montre que nécessairement f_0 doit être égale presque partout à $\mathbb{1}_{[0,1/2]}$ ce qui est impossible pour une fonction continue.
4. D'après le TPO, $\int_0^1 |x^3 - (ax^2 + bx + c)|^2 dx = d(X^3; \mathbb{R}_2[X]) = \left|\left|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}\right|\right|^2$. On cherche donc $P(X) = X^3 - ax^2 - bx - c$ tel que $\int_0^1 P(x)x^n = 0$

Motivations

Les espaces de Hilbert sont une généralisation des espaces euclidiens de dimension finie. Munis d'un produit scalaire, ils permettent l'extension de notions géométriques comme l'orthogonalité, et leur complétude par rapport à ce produit scalaire permet l'obtention de nombreux résultats d'analyse. On peut par exemple citer la notion de base hilbertienne ainsi que le critère de densité.
Un exemple remarquable de l'utilité des espaces de Hilbert est l'analyse de Fourier. La transformée de Fourier est en effet prolongeable sur l'espace de Hilbert L^2 et certains résultats vrais pour la transformée de Fourier sur L^1 se prolongent.
La structure d'espace de Hilbert, et plus particulièrement le théorème de projection sur un convexe fermé, offre également un cadre idéal pour l'optimisation convexe de fonctions à valeurs réelles définies sur un espace de Hilbert.

Métaplan :
Cadre :

1. Espaces pré-hilbertiens et hilbertiens
   (a) Définitions
      - Définitions EH
      - Exemples : espaces euclidiens ($\mathbb{R}^n$), L^2, l^2
      - Contre-exemple : $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme L^2 est préhilbertien non hilbertien (pas fermé)
      - Formules sur les Hilbert (parallélogramme, polarisation)
      - Notion d'orthogonalité : $A^\perp$ est toujours fermé
      - Résultats autour de $F^\perp$: dimension, somme (directe), fermeture, critère de densité + contre-exemples [GouAn] et [TE1MP] et [Hau]

   (b) Théorèmes et résultats centraux
      - Orthonormalisation de Schmidt
      - Théorème de projection sur un convexe fermé
      - Contre-exemple
      - Applications : polynômes de meilleure approximation
      - Théorème de projection orthogonale + distance à un sev [TE1MP]
      - Théorème de Riesz
      - Définition de l'adjoint
      - Critère de densité dans un Hilbert

   (c) Bases hilbertiennes
      - Def base hilbertienne
      - Séparable ssi admet une base hilbertienne dénombrable
      - **Base hilbertienne de polynômes orthogonaux**

2. Analyse de Fourier et espaces L^2 et l^2

(a) Séries de Fourier
   - Produit scalaire et définition du "L^2 Fourier" (intégrale sur $[0, 2\pi]$)
   - Inégalité de Bessel
   - Formule de Parseval
   - Base hilbertienne + isomorphisme l^2 et L^2
   - Conséquences : [GouAn] p260 : $c_n(f) = 0 \Rightarrow f$ nulle, CVU entraîne S égale à f.
   - Petite digression sur les hilbert séparables qui sont tous isomorphes à L^2 ?

(b) L'espace L^2
   - TF sur L^1 convention avec $e^{-2i\pi x\xi}$
   - Suivant la place : propriétés de la TF (dérivation, convolution)
   - Calcul de la TF de la gaussienne, du sinus cardinal
   - **Théorème de Fourier-Plancherel**
   - Application au calcul de l'intégrale de dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} sinc$ [Ber]

3. Optimisation dans les espaces de Hilbert
   - **Théorème de Lax-Milgram et résolution du problème de Sturm-Liouville**
   - Application à la résolution d'une EDO $(pu')' + \alpha u = f$ avec conditions de Dirichlet
   - **Optimisation d'une fonctionnelle convexe dans un convexe fermé d'un Hilbert** [4]

3.214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Donnez une fonction inversible inversible localement partout mais pas globalement inversible.
2. Soit la ligne de niveau $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2\}$. Est-ce une sous-variété ?
3. Est-ce que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ est une sous-variété ?
4. En quel point peut-on représenter la courbe $\mathcal{C} := \{x^3 + y^y - 3xy = 0\}$ sous la forme $y = f(x)$? (c'est une boucle)

Réponses

1. On s'inspire de l'exponentielle complexe : $f(x, y) := (e^x cos(y), e^x sin(y))$. Sa jacobienne en (x, y) est $e^x \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix}$ qui est de déterminant e^{2x}. Pourtant, elle n'est pas globalement inversible car par exemple elle n'est pas injective.
2. Ce n'est pas une sous-variété au voisinage de $(0, 0)$. En effet, $B(0, 1) \cap V \setminus \{(0, 0)\}$ a 4 composantes connexes alors que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a deux composantes connexes.

4. L'optimisation dans les espaces de Hilbert n'est pas un mythe : Lax-Milgram, Stampacchia... (même si ce sont des fonctionnelles quadratiques ici) servent à résoudre des EDO/EDP, genre le problème de Laplace/Poisson/elliptiques

3. Pour montrer que ce n'est pas une sous-variété de dimension 1, on fait de même que précédemment en enlevant deux points (un autre point que $(0,0)$). Quel que soit le voisinage de $(0,0)$, on aura toujours deux composantes connexes, alors qu'on en aura 3 dans $\mathbb{R}$. Pour la dimension 2, comme précédemment il suffit d'enlever 0.
4. On a, après calcul de la différentielle (il faut choisir x ou y pour l'équation, puisqu'on a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) donc plus de dimension au départ qu'à l'arrivée) : en dehors de $(x,y) = (0,0)$ et $(2^{4/3}, 2^{2/3})$, on peut représenter cette courbe $y = \varphi(x)$. On peut représenter cette courbe $y = \varphi(x)$

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. Inversion locale
   (a) Différomorphismes et théorème d'inversion locale et globale
      - Définition difféomorphisme, dessin
      - Exemples dans $\mathbb{R}$
      - TFI

   (b) Applciations et quelques difféomorphismes locaux et globaux
      - TFG
      - Contre-exemple : l'exponentielle sur $\mathbb{R}^2$ (diff local mais non global), ou bien [GouAn]
      - Image d'une application localement diff est un ouvert [GouAn] p323
      - **Lemme de Morse**
2. Fonctions implicites
   - TFI
   - Exemple cercle
   - TFI $\mathcal{C}^k$
   - Expression de la différentielle de φ [GouAn]
   - Cas à deux variables [GouAn] p326
3. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ [Laf]
   (a) Définitions et caractérisations
      - Définition par carte locale + dessin
      - Caractérisation par équation, graphe, nappe paramétrée
      - Exemples pour les 4 caractérisations ([Rou] + [Laf])

   (b) Application aux extrema liés
      - **Théorème des extrema liés**
      - Application à l'inégalité arithmético-géométrique,
      - Optimisation sous contrainte

3.215 Applications différentiables définites sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :
Leçon du 02/06 - Gaëlle Richet et Léon Le Loir avec Bachir Bekka
Questions

1. Donnez un contre-exemple au théorème de Schwarz
2. Quelle est la différentielle d'une application linéaire ? Bilinéaire ?
3. Donnez la différentielle du déterminant, de $M \mapsto M^2$

Réponses

1. $f : (x, y) \mapsto xy\dfrac{x^2 - y^y}{x^2 + y^2}$. On trouve -1 pour l'un et 1 pour l'autre.
2. $b(x + h, y + k) = b(x, y) + b(x, k) + b(h, y) + o(||(k, h)||)$

Motivations

La notion de différentielle vise à généraliser à $\mathbb{R}^n$ (plus généralement à E de dimension finie) la notion de dérivée sur $\mathbb{R}$. Certaines propriétés (linéarité par ex) se transfèrent à la différentiabilité, mais la notion de dérivée partielle ne suffit par exemple pas à obtenir de la continuité, contrairement au cas unidimensionnel.
Plus encore que dans le cas unidimensionnel, le calcul différentiel en dimension $n \geq 2$ fait étalage de l'utilité de l'algèbre linéaire comme "outil de base" : le principe de base du calcul différentiel est de pouvoir approximer localement une fonction f en $x + h$ par $f(x)$ + un terme linéaire par rapport à l'accroissement h.
La notion de $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme est quant à elle la formalisation d'une notion de "déformation lisse" (ex : pâte à modeler), et permet de généraliser la notion d'espace vectoriel en introduisant les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (si l'on peut déformer des choses, on devrait pouvoir "aplatir" certains objets en espaces vectoriels).

Métaplan :
Cadre :

1. Notions de base du calcul différentiel [TE1MPSI] [Rou] [Hau]
   (a) Différentiabilité, dérivation partielle
      - Définition différentiable
      - Cas application linéaire.
      - Exemples : déterminant, inverse matricielle, produit scalaire
      - Définition dérivée partielle
      - Contre-exemple non différentiable
      - Contre-exemple non continu
      - Expression $d_a f = \sum \partial_i f$
      - Définition jacobienne

- Théorème des fonctions composées
- Laplacien en coordonnées polaires (no ref)

(b) Classe C^k

- Définition fonction $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$
- Caractérisation par les dérivées partielles [Rou]
- Exemple $\mathcal{C}^1$ non différentiable
- Définition Hessienne

2. Calcul différentiel et recherche d'extrema

(a) Existence et unicité d'extrema : conditions nécessaires, conditions suffisantes

- Théorème des bornes atteintes
- CN : points critiques
- Contre-exemple point col $x^2 - y^2$
- Cas strictement convexe ou alpha-convexe : existence et unicité
- CS : Hessienne définie positive
- CN : Hessienne positive ou négative
- Contre-exemples hessienne dégénérée (typiquement $x^3 + y^3$)

(b) Optimisation et méthodes de descente de gradient

- Fonctionnelle quadratique
- Méthodes numériques : gradient à pas fixe, à pas optimal [Fil]

3. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et extrema liés

(a) Théorème d'inversion locale

- TIL
- Application [Laf] à la racine carrée d'une perturbation de l'identité matricielle
- Application : **Lemme de Morse**
- TIG
- Méthode TIL (montre que $f(\mathbb{R}^n)$ ouvert) + convexité => TIG
- Version holomorphe ?

(b) Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ [Laf]

- Définition par carte locale
- Dessin en annexe
- 4 caractérisations
- Contre-exemple graphe de $|x|$
- Remarque "equation" => "graphe" = théorème des fonctions implicites
- Exemple pour au moins quelques caractérisations (graphe et équation c'est facile) sinon c.f exercices du chap 1 de [Laf]

(c) Théorème des extrema liés

- **Théorème des extrema liés**
- Application à l'inégalité arithmético-géométrique
- Application exo [Rou] page 363
- Application au théorème spectral

3.219 Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Métaplan :
Cadre : $f : U \to \mathbb{R}$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

1. Existence et recherche d'extrema
   (a) Extrema globaux et continuité
      -
   (b) Extrema locaux et différentiabilité
      -
2. Convexité
   (a) Généralités sur les fonctions convexes
      -
   (b) Espaces de Hilbert
      - TPC,TPO, exemples et contre-exemples [GouAn] et [GouAl] pour contre-ex
      - TRRiesz
      - **Optimisation d'une fonctionnelle convexe dans un convexe fermé d'un Hilbert**
3. Recherche effective d'extrema
   (a) -
   (b) -
4. (a) -
   (b) -

Autres remarques : Ce n'est pas trop dans l'esprit de la leçon de parler de la construction de L^p par les fonctions étagées.

3.220 Equations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et études de solutions en dimension 1 et 2.

Rapport du jury 2020 :
02-12 Sylvain Procope-Mamert et Louis Noizet avec Paul Blochas
Métaplan :
Cadre :

1. Définitions des solutions d'une EDO
   (a) Solutions maximales et globales : définitions
      - Définition solution EDO

- Solution maximale
- Solution globale
- Formule de Duhammel
- A TRAVAILLER : Donner quelques exemples de résolutions explicites d'équations non linéaires

(b) Théorèmes d'existence

- (DEV) Cauchy-Lipschitz global
- Lemme de Grönwall
- Cauchy-Lipschitz local
- Théorème de sortie de tout compact

DEV Application : Théorème de Hadamard-Lévy

2. Etude numérique des EDO
   - Equivalence PdC et problème intégral [Dem] Chapitre V
   - Méthode d'Euler explicite [Dem] Chapitre V
   - Ordre de la méthode (ordre 2) sous hypothèse de régularité [Dem] Chap VII
   - Méthode du point milieu [Dem] Chap VII
3. Stabilité des solutions d'une EDO
   - Définitions : point d'équilibre, stabilité
   - Théorèmes de stabilité/instabilité linéaires

   DEV Théorème de stabilité de Liapunov
   - Contre-exemple tend vers 0 mais pas stable
   - Schémas numériques valeurs propres ?

Questions :

1. Montrer le lemme : Si A avec $(\lambda_i)_{1\leq i\leq q}$ comme valeurs propres alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\left|e^{tA}x\right|\right| \leq P(t, \lambda_1, \dots, \lambda_q)$
2. Exemple 13 (cas linéaire) : Existence, unicité, caractère maximal et/ou global dans le cas général ? Quelles hypothèses sur les a_k, sur b ?

Réponses :

1. Avec $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(A-\lambda_i)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, on a $e^{tA-t\lambda_i I_n}x_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!}(A-t\lambda_i I_n)^j x_i$ qui est plus petit en norme que $||x_i|| \left|\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{t^j}{j!}(A-t\lambda_i I_n)^j\right|\right|$. En remarquant $e^{t\lambda_i I_n} = e^{t\lambda_i} I_n$ D'où $\left|\left|e^{tA}x\right|\right| \leq \prod_i e^{t\lambda_i}\, ||x_i||\, ||x_{max}||$
2. Considérer le vecteur Y de composantes $y^{(k)}$. L'équation se réécrit $0Y' = A(t)Y + B(t)$ avec $A(t)$ compagnon et $B(t) = (0, \dots, 0, b(t))$. On suppose les $a_k\mathcal{C}^1$, on a alors $F(y,t)$ localement lipchitzienne d'où existence d'une solution maximale à tout PdC. Les solutions sont en fait glboales en utilisant Grönwall + théorème de sortie de tout compact.

$$Y(t) = Y(0) + \int_{t_0}^{t} A(s)Y(s)ds + \int_{t_0}^{t} B(s)ds$$

D'où, en norme :

$$||Y(t)|| \leq \left|\left|Y(0) + \int_{t_0}^{t} B(s)ds\right|\right| + \int_{t_0}^{t} ||A(s)|| \, ||Y(s)|| \, ds$$

On applique ensuite Grönwall, on note $I(t)$ l'intégrale obtenue. On prend un t_0 et on suppose que la solution est définie sur $[t_0, T^+]$ (maximal). Si $T^+ < +\infty$, par théorème de sortie de tout compact, pour tout $K = [t_0, r) \times \mathcal{B}(0, R)$ compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on a $\forall M > 0$, $||Y(t)|| \geq M$ pour t proche de t_0. Avec $R = I(T^+)$ on obtient une contradiction.

Sur le plan : On peut mettre CyL local avant le global (preuve avec Gronwall) mais c'est mieux de le mettre après.

3.221 Équations différentielles linéaires. Systémes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 25/11 (Hugo LL, Corentin avec Titouan Sérandour) Dév : Liapounov

Questions :

1. Interprétation géométrique du th de Liapounov ?
2. Rq 12 sur la dimension de l'ev des solutions d'une EDL : ordre p sur $\mathbb{K}^n = pn$, pourquoi ? Isomorphisme ?
3. Sur le wronskien : si il est nul pour un certain temps t, qu'est-ce qu'il se passe pour les autres temps ?
4. Résoudre $y^{''} + 4y = tan(t)$

Réponses :

1. Dessin équilibre asymptotique[5]
2. Proposition 3 (lien entre système d'ordre p et système matriciel d'ordre 1). L'isomorphsisme est celui de la proposition 11.
3. Même isomorphisme (prop 11) montre que le wronskien sera nul pour tout t.
4. Equation homogène. Lien avec le plan pour la solution particulière (plutôt avec cos et sin d'ailleurs) :
$$\begin{cases} -A^{'} \sin(2t) + B^{'} \cos(2t) & = tan(t) \\ A^{'} \cos(2t) + B^{'} \sin(2t) & = 0 \end{cases}$$

Autres remarques :

Plan : attention aux couleurs sur le plan (pas de couleurs pour l'impression). Pour améliorer la lisibilité, il n'y a pas d'autre choix que de souligner. Encadrer les développements pour les mettre en valeur.
Théorème wronskien (30) à mettre avant le théorème 29 (base de solutions).
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais aucun exemple dans $\mathbb{C}$... On peut mettre aussi dans I : toute solution peut se prolonger en une solution maximale.
Le jury dit "Cauchy-lipschitz c'est bieng"
Sinon : Equation de Bessel, différentielle de l'exponentielle, ...
Pour Liapounov : on peut faire des dessins aussi. (dessins des portraits de phase qui sont dans le plan : Demailly).
Quand le jury dit "il reste 1 :30", essayer de poser la craie et de finir à l'oral.

5. Perso je mettrais aussi le dessin du rouvière avec les lignes de niveau de la fonction de Liapunov

Métaplan :
Cadre : $y' = f(t, y(t))$ avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1. Structure des solutions
   (a) Généralités
      - Définition, ramener à l'ordre 1 en plusieurs variables

      DEV Cauchy-Lipschitz global
      - Théorème d'explosion en temps fini
      - Corollaire : Cauchy-Lipschitz cas linéaire
      - Structure d'ev, d'ea

   (b) Exponentielle de matrices
      - Formule de Duhamel
      - Forme des solutions d'une EDL
      - Décomposition de Dunford
      - Exemple de système différentiel
2. Approximation linéaire d'EDO
   (a) Equilibre, stabilité
      - Déf point d'équilibre, éq stable, instable, asymp. stable
      - Portraits de phase du pendule ? [Dem]

   (b) Approximation linéaire
      - Défintion système linéarisé

      DEV Théorème de Liapunov

   (c) Méthodes numériques d'approximation de valeurs propres
3. EDL et distibutions [Zui]
   - Définition dérivée
   - Equation $T' = 0$ Il faut mq T s'annule sur les $\phi = \theta'$ i.e sur les phi d'intégrale nulle
   - Equation $T' = S$ Il faut mq T définie sur l'hperplan $\{\phi$d'intégrale 0$\}$, puis compléter par la droite $\mathbb{R}\theta$, avec theta d'intégrale 1
   - Equation T'+aT = f [Zui] p 39

3.222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2$ telle qu'il existe φ telle que $f(x, y) = \varphi(x^2+y^2)$. Montrer que f est harmonique ssi φ vérifie une EDO. Résoudre cette EDO.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouvez des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ telles que $x\partial_x f(x, y) + y\partial f(x, y) = \alpha f(x, y)$. Indication : changement polaire.

Réponses

1. On trouve, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\psi' + z\psi = 0$ avec $\psi = \varphi'$. On trouve une gaussienne.
2. Pas eu le temps le jour de la leçon.

Métaplan :
Cadre :

1. Equation de transport
   (a) Cas homogène
      - Méthode des caractéristiques

   (b) Cas général
      - Résolution via les caractéristiques
2. Séries de Fourier et application aux EDP
   (a) Théorèmes de convergence pour les séries de Fourier
      - Féjér

   (b) Equation de la chaleur
      -

   (c) Equation des ondes et vibration sur une corde
      -
3. Schémas aux différences finies [DiM]
   (a) Principe et vocabulaire
      -

   (b) Application à l'équation de transport
      -

   (c) Application à l'équation de la chaleur
      -

Remarques : pour résoudre des EDP en développement, prendre un cadre simple (exemple : c.f X-ENS Analyse 4 : cadre périodique $\mathcal{C}^1_{pm}$ pour la solution initiale et cadre séries de Fourier ($\mathcal{C}^\infty$).)
Autres problèmes classiques : recherches des valeurs propres du laplacien.

3.223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 : Leçon du 16/12 Dév :
Questions :

1. Généraliser la méthode de Newton en dimension supérieure
2. Montrer la divergence de la série harmonique
3. Donner des exemples de suites denses dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall m, n,\ u_{m+n} \leq u_m + u_n$ et telle que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est bornée. Montrée que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge.

Réponses :

1. Hypothèses : $F : E \to E$, "$\mathcal{C}^2$" i.e $\forall x \in E$, $D^2 f(x) \in GL(E)$. Alors on pose $x_{n+1} = x_n - DF(x_n)^{-1}.F(x_n)$.
2. Ca se fait. (perso je montre le DL à l'ordre 0)
3. La suite $(\cos(n))$ est dense dans $[-1, 1]$. En effet, $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. C'est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer qu'il n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.
4. Arguments autour de limsup et liminf. c.f captures d'écran

Autres remarques : Attention, on ne somme pas des équivalents...

Plan : Mettre en évidence les développements dans le plan. Dans cette leçon : un max d'exemples. Idées de développements : Théorème Taubérien faible/fort d'Abel,

Métaplan :

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Premières définitions et propriétés
   (a) Vocabulaire
      - Déf convergence/divergence R/C + unicité
      - Déf suite bornée, monotone
      - Th convergence monotone, gendarmes
      - Exemples : $cos(n)$ diverge mais pas vers l'infini,

   (b) Suites usuelles
      - Suites définies par récurrence
      - Suites arithmétiques et géométriques, expression, somme
      - Suites arithmético-géométriques
      - Suites adjacentes
      - Suites récurrentes doubles ?
2. D'autres notions de convergence
   (a) Valeur d'adhérence
      - Définition
      - Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et evn
      - Déf compact

   DEV Exemple d'une suite avec une infinité de valeurs d'adhérence : sous-groupes de $\mathbb{R}$ et densité de $(\cos(n))$.

   (b) Convergence au sens de Césaro
      - Déf
      - Théorème de Césaro
      - Contre-exemple [Hau] p104
3. Vitesse de convergence
   (a) Suites de Cauchy
      - Définition, espace complet
      - Cauchy + v d'adh = converge
      - Théorème du point fixe B-P [Rou]

   (b) Vitesse de convergence
      - Définition ordre/vitesse de cv - [Dem] p220 et 222

   DEV Méthode de Newton : un exemple de convergence quadratique - [Dem]

3.226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Rapport du jury 2020 :

Leçon 18/11 : dév choisi : Fonction tente et Cantor

Questions

1. Dessiner la fonction tente ?
2. Sur les points fixes répulsifs : Preuve de prop 30 (Si $|f'(a))| > 1$ alors point fixe répulsif)
3. Dessin de différentes situations de la proposition 21 (attractivité, superattractivité, répuslivité).
4. Pourquoi il suffit d'avoir des itérées pour avoir le point fixe ?

Réponses

1. Bah on dessine hein.
2. $|f'(a))| \geq k > 1$. On pose $J_h = [a - h, a + h]$, $h > 0$ petit. Par l'absurde : si tous les $|u_n|$ sont dans J_h alors $h > |u_{n+1} - a| \geq k^n |u_0 - a| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$: contradiction.
3. Attractif : fonction convexe sous id, répulsif : fonction convexe au dessus de id, superattractif : (sinon : pendules et diagrammes de phase)
4. Classique, c.f [Rou] p 159.

Développements classiques : méthode de Newton,

Métaplan :

Cadre :

1. Définitions et premiers exemples
   (a) Suites usuelles
      - Arith, géo, arith-géo
      - Suites récurrentes linéaires d'ordre n
   (b) Suites récurrentes vectorielles
      - Cas linéaire $X_{n+1} = AX_n$
      - Exemple : Probabilités discrètes déplacement entre 3 points
      - Cas récurrent linéaire double : déterminant matrice laplacien qui vaut $4n - 2$.
2. Points fixes
   (a) Théorème de Banach-Picard
      - Théorème de Banach-Picard
      - Une application : théorème de Cauchy-Lipschitz
   (b) Attraction, répulsion
      - Liens monotonie de f, attraction, répulsion
      - exemple avec plusieurs points fixes suivant la valeur de départ : $f = sin$.
3. Résolution approchée d'équations
   (a) Méthode de Newton

      DEV Méthode de Newton dans le cas d'une fonction à valeurs réelles

- Généralisation à $\mathbb{R}^n$

(b) Résolution d'EDO

- Méthode d'Euler
- Méthode du point milieu

(c) Optimisation [Fil]

- Méthode du gradient à pas fixe
- Méthode du gradient à pas conjugué

3.228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon 05/11 : Paul Mansarenez et Arnaud Nerrière avec Miguel Rodriguez Questions :

1. Donner une fonction de dérivée presque partout nulle mais qui ne soit pas constante
2. Une fonction localement lipschitzienne mais pas lipschitzienne
3. Une fonction $\mathcal{C}^1$ de dériveé bornée mais qui ne soit pas lipschitzienne (on enlève juste l'hypothèse "intervalle" du théorème
4. Donner une fonction $\mathcal{C}^1$ de dériveé partout négative mais qui ne soit pas décroissante
5. Est-ce que L^1_{loc} s'injecte continûment dans $\mathcal{D}'$?
   Questions qu'on aurait pu se poser :
6. Avec f holderienne : f holderienne ssi il existe $g \in L^1$ telle que $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_x^y g$.

Réponses

1. $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{2}$ est de dérivée seconde δ_0.
   Sinon, l'escalier de Cantor est de **dérivée presque partout nulle**, est **continue**, mais n'est pas constante.
2. exp, x^2, $\sqrt{x}$
3.
4.
5. Pour simplifier : on prend L^1. On a $\Phi : f \mapsto (\phi \mapsto \displaystyle\int \phi$.
6. Oui. (topologie : c.f leçon)

Autres remarques : Exemple de l'escalier de Cantor => la dérivée presque partout (distributionnelle) n'est pas une bonne notion pour savoir si une fonction continue est monotone ou pas / constante ou pas. Pas de trou particulier dans le plan présenté par Paul et Arnaud.
Remarques sur la forme : Indiquer les DEV dans le plan écrit. Penser à regarder le jury pour capter son attention. Pour le développement : si on a une équivalence cela peut valoir le coup de faire l'implication triviale juste à l'oral.

Métaplan [INCOMPLET] :

1. Continuité
    (a) Théorèmes fondamentaux
        - Déf $\mathcal{C}^0$
        - $|x|$, polynômes, ...
        - TVI
        - Th fondamental analyse
    (b) Uniforme continuité
        - Théorème de Heine
2. Distributions et dérivation faible
    (a) Définitions et dérivée distributionnelle
        - Déf distribution et $\mathcal{D}(\Omega)$ et ordre distrib
        - Exemples : Dirac, Heaviside, valeur principale
        -
    (b) Espace de Schwartz
        -

3.229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Métaplan :
Cadre :

1. Fonctions monotones
    (a) Définitions, premiers exemples
        - Fonction monotone, strictement monotone
        - Exemples
        - Comparaison série-intégrale pour une fonction monotone
    (b) Continuité
        - Limites à gauche et à droite
        - Raffinement du TVI en cas de stricte monotonie
        - Lien avec l'injectivité
    (c) Dérivation de fonctions monotones
        - Dérivabilité presque partout des fonctions monotones (admis)
        - Fonction C^1 par morceaux : on ne "voit pas" les sauts.

- Exemple de l'escalier de Cantor : $f' = 0$ mais croissante : pas une bonne notion pour observer la croissance.

2. Fonctions convexes (Cadre $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$
   (a) Généralités
   - Déf
   - I3P + dessin
   - Liens f', f''
   - Liens gradient
   - Dessins fonction affine par morceaux, dessin $x^2 + y^2$

   (b) Un exemple : fonctionnelle quadratique
   - Convexité
   - Calcul du gradient
   - Interprétation en tant que minimum de $||Ax - b||^2$

   (c) Modèle de Galton-Watson
   - **Modèle de Galton-Watson**

   (d) Extrema et optimisation
   - **Optimisation d'une fonctionnelle convexe dans un convexe fermé d'un Hilbert**
3. Distributions sur $\mathbb{R}$
   - Dérivation
   - Formule des sauts : rend compte des sauts d'une fonction non continue.

3.230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Question sur le développement : pourquoi quand on applique le TVI pour définir $\pi/2$ comme le premier zéro de cos, on a bien inf = min ? Pourquoi cos est continue ?
2. Pourquoi $(e^h - 1)/h \underset{h \to 0}{\to} 1$?
3. Rappeler le critère de Leibniz
4. Montrer que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.
5. (suite) Donner un équivalent du reste de cette série. On pourra utiliser la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$

Réponses

1. Car cos est continue (+carac borne inf). On a cos continue par continuité de l'exponentielle, elle-même donnée par le théorème de continuité pour les séries de fonctions.
2. On a $exp(h) - 1 = \sum_{1}^{+\infty} h^n/n!$ et donc on peut factoriser par h et obtenir le résultat ($e^0 = 1$).

3. Série alternée à terme décroissant (en valeur absolue) et qui tend vers 0 $\Longrightarrow$ la série converge, la somme est du signe du 1er terme, le reste partiel vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ (premier terme négligé). Enfin la somme est comprise entre les termes pairs et impairs : $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$
4. Comparaison série-intégrale
5. Par théorème de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, $R_n \sim \dfrac{1}{n}$.[6]

Motivations

Les séries numériques sont un type particulier de suite numériques qui apparaissent naturellement : les séries arithmétiques et géométriques, qui sont les suites des sommes des suites du même nom, sont un premier exemple (concrètement : calculer une somme d'argent, ...). C'est la généralisation de la notion de somme : on peut parfois se demander "ce qu'il se passe si on continue à ajouter une certaine quantité une infinité de fois". (c.f problème du coureur qui parcourt $1/2^n$ mètres en $1/2^n$ secondes). C'est aussi en rencontrant des séries numériques que l'on peut fabriquer un nombre fini en ajoutant un nombre infini de termes.
Les séries numériques sont également un moyen
On voit aussi naturellement apparaître les séries numériques en probabilités discrètes lorsqu'il s'agit de calculer des espérances de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$: on calcule une "somme infinie" de valeurs pondérées par leur probabilité. (c'est la généralisation de la notion de "moyenne" que l'on utilise au quotidien).

Métaplan :
Cadre : On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Premières notions sur les séries numériques [TE1MPSI] [TE1MP] [GouAn]
   (a) Séries à termes positifs
      - Définition, exemples
      - Application : représentation d'un nombre en base 10, et 0.9999... = 1

   (b) Convergence et divergence de séries numériques
      - Série convergente, absolument convergente, divergente
      - Exemples pour chaque
      - $\sum u_n$ cv implique $u_n \to 0$ + notion de série grossièrement divergente
      - Série semi-convergente
      - Théorème de réarrangement de Riemann [XENSAn1]
2. Critères de convergence, applications [TE1MPSI] [TE1MP] [GouAn]
   (a) Critères principaux de convergence
      - Théorème de comparaison à une intégrale
      - Application : **Application du lemme de Borel-Cantelli** [Ouv2] (justification : séries numériques dans le résultat, th de comparaison à une intégrale pour toute la 2e application)

6. On peut raffiner en regardant un équivalent du reste de $\sum_{k \geq 2} \dfrac{1}{k(k-1)}$ –

- Critère de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv ssi $\alpha > 1$
- Exemple de $\zeta(2), \zeta(4)$
- Critère de Bertrand
- Critère spécial des séries alternées (Leibniz) + majoration du reste
- Exemple d'une série alternée non convergente

(b) Méthodes de quadratures appliquées au calcul d'intégrales

- Définition somme de Riemann à gauche (et/ou à droite) + dessin rectangles
- Convergence (vers l'intégrale) lorsque continuité
- Méthode des trapèzes
- Lien avec les méthodes numériques de résolution d'EDO ? ([Dem])

3. Exemples de séries de fonctions [ZuQu]

(a) Séries de Fourier

- Définition coefficients de Fourier
- **Théorème de Féjér**
- Applications du [ZuQu]

(b) Séries entières

- Rayon de convergence
- Lemme d'Abel
- Critère de d'Alembert, de Cauchy, formule de Hadamard $R^{-1} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n}$
- Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de CV, (+ application à l'interversion somme-limite, somme-intégrale ?)
- Application : caractère $\mathcal{C}^\infty$ des séries entières
- Principe des zéros isolés ?

Autres remarques : Même s'il ne faut pas parler de séries fonctions juste pour parler de séries de fonctions, il est apprécié d'en parler. Il en va de même pour les séries de Fourier, les séries entières. Par contre il faut séparer les séries entières du reste. (il ne faut pas mettre ça dans séries de réels/complexes). On peut y parler de fonctions holomorphes aussi.
Sur la structure du plan : pas vraiment motivée (assez linéaire). Il ne faut pas hésiter à expliquer pourquoi on présente les choses dans cet ordre là (d'abord séries à termes positifs, etc). Absence du produit de Cauchy : manquement à la leçon.
Développements classiques : théorèmes abéliens, théorèmes taubériens, pour ce qui se passe sur la sphère du disque ouvert de CVN pour les séries entières.

3.233 Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 17/03 - Marine Perron et Diego Condori avec Bachir Bekka Développements : LU+Cholesky (items 16 et 18) et Convergence méthodes itératives (items 23 et 26) Questions

1. Est-ce que les méthodes directes fournissent des solutions exactes ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que pouvez vous dire de $||A||_2$?
3. En déduire $cond_2(A) = \rho(A)$ pour $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Pourquoi $\rho(A) \leq ||A||$ pour toute norme subordonnée ? Pourquoi pour tout $\varepsilon > 0$ existe-il une norme telle que $\rho(A) \geq ||A|| - \varepsilon$?
5. Expliquer la proposition 10

Réponses

1. En théorie oui, mais si l'on prend en compte l'erreur machine, non. On obtient en pratique des solutions approchées. D'où l'intérêt des méthodes itératives (qui donnent aussi une valeur approchée).
2. $||A||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.
3. c.f au dessus.
4. c.f OpenBoard

Motivations

L'analyse numérique matricielle permet la résolution de problèmes en algèbre linéaire via des méthodes implémentables sur un ordinateur. Les méthodes peuvent être directes (Gauss, LU, Cholesky...) ou bien itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation, ...). On peut aussi obtenir les éléments propres d'une matrice via des méthodes comme la méthode QR ou la méthode de la puissance.
On peut voir l'AN matricielle comme un pont entre l'algèbre linéaire et l'informatique "pratique", le but étant de pouvoir résoudre des systèmes de "grande taille" (plus que 3...), avec des applications dans de nombreux domaines : résolution d'équations différentielles linéaires (ou linéarisées), calcul de valeurs approchées de polynômes, ...

Métaplan :
Cadre :

1. Premières notions : rayon spectral et normes matricielles [Cia] chap 1
   (a) Normes subordonnées et rayon spectral
      - Norme subordonnée, fomules pour les 3 normes usuelles
      - Déf rayon spectral
      - Equivalences $A^k \to 0$, $A^k x \to 0$, norme matricielle et rayon spectral
      - Théorème d'encadrement du rayon spectral
   (b) Conditionnement [Cia] chap 2 ou [All] p 415-417
      - Définition conditionnement
      - Conditionnement pour les matrices unitaires (orthogonales)
      - Exemple de matrice mal conditionnée : matrice du laplacien [All] p417
2. Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires
   (a) Méthode du pivot de Gauss

- Matrices de permutation, de dilatation, de transposition
- Effet de chaque par multiplication à gauche/droite
- Complexité en $O(n^3)$ dans le cadre général
- Application à la résolution de systèmes, au calcul de l'inverse d'une matrice
- Matrice échelonnée, calcul du rang

(b) Factorisation LU et Cholesky [Cia]

- **Factorisation LU et Cholesky**
- Complexité cas tridiagonal

3. Méthodes itératives

(a) Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires [Cia]

- Notations et principe
- **Résultat général de convergence (cv ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$)**
- Tableau avec Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation
- + dessin

(b) Localisation et calcul de valeurs propres

- Théorème des disques de Gerschgörin
- Méthode de la puissance [Fil]
- Méthode QR [Cia]
- Application : éléments propres d'une matrice compagnon : calcul approché de racines d'un polynôme

Remarques : On peut mettre aussi : disques de Gerschgörin

3.234 Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

Rapport du jury 2020 :
Intégration au sens large : mesure de Lebesgue, mesure de comptage, mesures absolument continues par rapport à $d\lambda$ ou encore mesures de probas "entrent tout à fait dans le cadre").
Il faut parler de suites de fonctions L^p, au moins des trois théorèmes de CV : Fatou, Beppo Levi, TCD. Ne pas oublier exemples et contre-exemples. Il faut maîtriser le lien Riemann-Lebesgue, et les histoires de presque-partout.
On peut faire une partie sur L^p mais pas forcément toute la leçon. On doit parler de densité, de régularisation et de convolution. L^2 mérite de l'attention mais éviter les propriétés générales des Hilbert et de concentrer sur les spécificités de L^2 en particulier.

Leçon 16/03 : Christopher Langrenez et Jérémy Zurcher avec Miguel Rodriguez Développements : Riesz-Fischer, Polynômes orthogonaux, Lemme de Borel

Questions

1. Comment montrer l'injectivité de la TF ?
2. Comment montrer l'analycité des intégrales à paramètres (Holomorphie sous domination) ?
3. Montrer la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans L^p
4. Montrer l'exemple 12 : $\displaystyle\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{-4x}dx$ converge vers $\dfrac{1}{1+4} = \dfrac{1}{5}$

5. Donner les arguments du lemme de Borel dans les grandes lignes
6. Question possible : montrer la continuité des translations $\tau_a : f \mapsto f(-\cdot)$. Attention à ne pas utiliser la convolution et la densité.

Réponses

1. Utiliser la propriété : si $\widehat{f} \in L^1$ (en particulier si $\widehat{f}$ nulle) alors $\widehat{\widehat{f}} = f(-\cdot)$.
2. Cauchy et majorations
3.
4.
5. $f(x) = \sum_0^{+\infty} f^n(0)x^n/n! \times \phi(\lambda_n x)$

Métaplan :

Motivations

Intégrale de Lebesgue = généralisation de l'intégrale de Riemann : on peut intégrer toutes les fonctions Riemann-intégrables, plus certaines bizarreries comme $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. La flexibilité de la notion de mesure permet aussi d'englober les séries via la mesure de comptage et donc de formuler des théorèmes dans un cadre très général (c.f TCD qui englobe le TCD de Riemann et les théorèmes "à la con" de dérivation, etc, sous le signe somme). C'est également le cadre idéal pour les probabilités, continues et discrètes.

Cadre : espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$

1. Intégrale de Lebesgue
   (a) Intégrations de fonctions mesurables positives
      - Fonction étagées
      - Fonctions mesurables
      - Exemples de mesures : Lebesgue, comptage, probabilité
      - Beppo Levi (convergence monotone)
      - Comparaison série-intégrale pour les fonctions positives

   (b) Intégrabilité au sens de Lebesgue
      - Lemme de Fatou
      - TCD (énoncé pour des familles de fct et non juste pour les suites)
      - Traduction du TCD pour les séries de fonctions (mesure de comptage)
      - Application aux théorèmes de régularité C^k, $k \in \mathbb{N}$ et holomorphe sous domination
2. Espaces L^p
   (a) Structure algébrique et premières propriétés
      - Définition normes et espaces quotients L^p et L^∞
      - Le $\mathbb{R}$-ev $(L^p, +, .)$

- Inégalité de Hölder
- Inégalité de Minkowski
- Inclusions dans le cas d'une mesure finie (ex :proba) : $L^p \subset L^r \subset L^q$ pour $p < r < q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- En particulier $\forall p \geq 1$, $L^\infty \subset L^p$ pour les mesures finies
- $l^p \subset l^q$ pour la mesure de comptage

(b) Propriétés analytiques et topologiques

DEV **Théorème de Riesz-Fischer (complétude des L^p)**

- Convolution (fonctions convolables = il faut que $y \mapsto f(x-y)g(y)$ soit intégrable)
- La $\mathbb{R}$-algèbre $(L^1(\mathbb{R}^d, +, *, .)$
- Propriété de régularisation : si $f \in C_c^k$ et $g \in L^1$ alors $f * g$ est C_c^k. (à support compact car il faut pouvoir appliquer TCD sans problème)
- Approximations de l'unité
- Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$

3. L'espace de Hilbert L^2

(a) Une base hilbertienne : les polynômes orthogonaux

DEV **Base hilbertienne de L^2 consituée de polynômes orthogonaux**

(b) Lien avec la transformée de Fourier

- Isomorphisme isométrique entre l^2 et L^2
- Tout Hilbert séparable est isomorphe à L^2

Remarques générales : essayer d'être - linéaire dans la lecture du plan. Il est judicieux aussi de commencer le développement non pas directement mais par une introduction présentant l'argument ou les arguments clés / les étapes importantes.
Remarques spécifiques : on peut insister sur l'importance de faire un quotient pour les $\mathcal{L}^p$ et L^p. La propriété suivante est intéressante aussi : si $f \in L^1 \cap L^\infty$ alors $||f||_\infty = \lim_{p \to +\infty} ||f||_p$.

3.235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Métaplan :
Cadre :

1. Suites et séries de fonctions

(a) Interversions limite-limite

- Interversion limites en x et en n : CVS, CVU

        - Iterversions de limites en proba : Théorèmes de croissance/décroissance séquentielle des mesures
        - Application : Borel-Cantelli
    (b) Interversions limite-somme
        - Cas séries à termes positifs
        - CVU : permet d'intervertir
        - Critères de CVU : majoration, équivalence, comparaison à une intégrale
        - Interversions sommes-sommes : produit de Cauchy de séries ACV
2. Interversions limite-intégrale
    (a) Fonctions mesurables positives
        - Beppo-Lévi
        - Fatou
    (b) Fonctions mesurables : cas général
        - CVU et interversion sur un segment
        - Théorème de Convergence Dominée
        - Applications en proba
3. Interversions intégrale-intégrale
    - Tribu produit [BrPa] III.11)
    - Mesure produit
    - Théorème de Fubini-Tonelli
    - Théorème de Fubini

    DEV Application : **Théorème de Fourier-Plancherel**

    - (Application : calcul de $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ via le calcul de la TF de *sinc* et de $\frac{x}{1+x^2}$)
4. Régularité sous la somme, sous l'intégrale
    (a) Pour les séries de fonctions
        - Dérivation d'une série de fonctions [GouAn]
        - Intégration d'une série de fonctions (vient du TCD) [BrPa] III.8.2)
    (b) Intégrales à paramètre
        - Continuité sous l'intégrale
        - Dérivabilité, $\mathcal{C}^k$ sous l'intégrale
        - Holomorphie sous l'intégrale

        DEV Un exemple d'étude : **ζ de Riemann**

3.236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Motivations

Métaplan :
TCadre :

1. Techniques élémentaires de calcul d'intégrales [GouAn] [TE1MP] ou [TE1MPSI]
   (a) Modes de convergence d'une intégrale
      - Intégrale convergente, semi-convergente, fonctions L^1
      - Exemple de $\displaystyle\int sinc$ (Dirichlet)

   (b) Premières méthodes de calcul
      - Parité
      - Exemple immonde page 654 du [TE1MPSI]
      - Comparaison série-intégrale
      - Application intégrales de Riemann
      - Intégration par parties
      - Exemples
      - Changement de variables
      - Exemple changement polaire et calcul de la gaussienne
      - Décomposition en éléments simples
      - Règle de Bioche [TE1MPSI] p61 let's go
2. Intégrales à paramètre
   (a) Convergence dominée et applications
      - Théorème de convergence dominée
      - Application : Densité des fonctions $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans les L^p, dans
      - Continuité sous domination
      - Dérivation sous domination
      - Application : Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

- Holomorphie sous domination
- Application au prolongement de ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

(b) Transformée de Fourier

- Définition TF L^1 comme intégrale à paramètre
- Application : polynômes orthogonaux
- Exemple : calcul de la TF de la gaussienne par EDO
- Fourier-plancherel
- Application : calcul de $\int sinc$ (voir Bernis) (il faut calculer la TF de $\mathbb{1}_{-1/2,1/2}$

(c) Théorème des résidus

- Théorème des résidus
- **Formule des compléments de Γ via le théorème des résidus**
- Exemple : calcul de la TF de la gaussienne par théorème des résidus (rectangle)

3. Calcul approché d'intégrales
   - Définition somme de Riemann à gauche (et/ou à droite) + dessin rectangles
   - Convergence (vers l'intégrale) lorsque continuité
   - Méthode des trapèzes
   - Lien avec les méthodes numériques de résolution d'EDO ? ([Dem])

3.239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1.

Réponses

1.

Métaplan :
Cadre :

1. Généralités sur les intégrales à paramètre

(a) Premier cas : sur un segment

- Rôle de la CVU
- Continuité et dérivabilité d'une intégrale à paramètre sur un segment [GouAn]

(b) Intégrales impropres : théorèmes de convergence sous domination

- Lemme de Fatou
- TCD
- Continuité sous l'intégrale
- Dérivabilité, $\mathcal{C}^k$ sous l'intégrale

- Holomorphie sous l'intégrale [ZuQu]
- Application : Γ d'Euler holomorphe sur $\{Re > 0\}$

(c) Théorème de Fubini

- Tribu produit [BrPa] III.11)
- Mesure produit
- Théorème de Fubini-Tonelli puis Fubini

2. Deux exemples importants

(a) Convolution

- Fonctions convolables

(b)

(c) Transformée de Fourier

- Théorème de Fourier-Plancherel [131D] dév87
- (Application : calcul de $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ via le calcul de la TF de $sinc$ et de $\frac{x}{1+x^2}$)

3. Intégrales à paramètre en analyse complexe

(a) Intégration complexe

- Théorème de Cauchy

(b) Fonction ζ de Riemann

- Définition de Γ
- Formule des compléments

DEV Prolongement de ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

3.241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Rapport du jury 2020 : Les résultats généraux sur les différents types de convergence doivent être présentés et maîtrisés. Le jury attend des séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries génératrices, séries de Fourier, avec des exemples et des applications. Pour aller + loin : zêta de Riemann, séries de Dirichlet,... La leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes. Pour aller plus loin, on pourra présenter comment identifier la limite au sens des distributions d'une famille qui régularise la masse de Dirac ou encore aborder des exemples de construction de parties finies de Hadamard.

Questions

1.

Réponses

1.

Métaplan :
Cadre : $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1. Généralités sur les suites de fonctions [GouAn]

(a) Définitions, convergence
   - Déf suite
   - CVS, CVU
   - $x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$
   - Suites de cauchy + critère de Cauchy [GouAn]
   - Théorème de Dini ?

(b) Continuité et régularité
   - CVU et continuité
   - CVU et interversion $\displaystyle\int \leftrightarrow \lim$
   - Dérivation d'une suite de fonctions

2. Approximations par des suites de fonctions
   (a) Théorème de Weierstrass
   - Théorème de Weierstrass
   - Application : suites de polynômes orthogonaux
   - Polynômes de Hermite et oscillateur harmonique

   (b) Convolution et régularisation [ZuQu] p324
   - Définition fonctions régularisantes
   - Propriété $\rho_n \star f \in \mathcal{C}^\infty$ pour toute fonction $f \in L^p$. [ZuQu] p319

   DEV **$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$**

3. Séries de fonctions [GouAn]
   (a) Généralités
   - Définition, définitions des CV S,U et N
   - Implications, contre-exemples [GouAn] p236 ex2)b)

   (b) Résultats de convergence
   - Dérivation, intégration d'une série de fonctions

   (c) Séries de Fourier

DEV **Théorème de Féjér**

3.243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 07/04 - Margot Turcan et Tiphany Chenais avec Zied Ammarri
Questions

1. Sur le développement (Abel angulaire + taubérien faible) : est-ce que le résultat nécessite toute cette preuve pour un RCV > 1 ?
2. Exercice : calcul de la limite de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ en $z \to 1$, $|z| < 1$.

3. Existence de Γ ? Holomorphie ? Pôles ?
4. Calculer le RCV de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ln(n)z^n$
5. Calculer le RCV de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ puis le produit de Cauchy.

Réponses

1. On a une convergence normale donc convergence en 1. Le théorème n'a d'intérêt uniquement pour $R = 1$.
2. On a $\displaystyle\lim_{z\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \lim_{1^-} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ mais on n'est pas dans le cadre du théorème taubérien faible.
3. $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^t dt$ est définie sur $\{Re > 0\}$ (critère de Riemann). Pour les pôles : on montre $\displaystyle\int_0^1 t^{z-1}e^t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{z+n}$ + théorème d'holomorphie sous l'intégrale pour $[1, +\infty[$.
4. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(n) \leq n$ donc le RCV est ≥ 1. En $z = 1$ on a $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc le RCV est ≤ 1. Sinon : d'Alembert.
5. Les RCV sont respectivement $1/2$ et 1. Le RCV du produit de Cauchy est $1/2 = \min(R_1, R_2)$). Cependant on peut trouver un contre-exemple avec $\sum z^n$ multiplié avec $1-x$ qui est de RCV infini.

Motivations

Une première approche aux séries entières est de considérer cela comme une généralisation de la notion de polynôme. Sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence, une série entière est "ce que l'on fait de plus régulier" après les polynômes. Des théorèmes fondamentaux tels que les zéros isolés remplacent les propriétés des polynômes du type "s'il y a une infinité de racines alors le polynôme est nul".
On retrouve des séries entières dans différents domaines, à commencer par l'analyse complexe : ce sont *les* fonctions holomorphes (c'est à cela qu'on doit le nom d'"entier", i.e défini sur $\mathbb{C}$ tout entier). On les retrouve aussi en probabilités avec les fonctions génératrices de variables aléatoires discrètes, qui caractérisent la loi et qui fournissent un outil de démonstration de certains résultats tels que le processus de Galton-Watson.

Métaplan :
Cadre : Séries entières $\sum a_n z^n$ à variables et valeurs complexes

1. Notions de base sur les séries entières [GouAn] [TE1MP] [Tau]
   (a) Rayon de convergence, modes de convergence
      - Lemme d'Abel
      - Définition RCV et disque ouvert de CV

- GDV et ACV
- Exemples fonctions continues ou discontinues en un point du disque fermé
- Caractère $\mathcal{C}^\infty$
- RCV de la somme, du produit de cauchy

(b) Critères de convergence

- Critère de d'Alembert
- Critère de Cauchy
- Formule de Hadamard
- **Théorèmes d'abel angulaire et taubérien faible**
- Applications au calcul de π, de $\ln(2)$
- Contre-exemple à Abel : $\sum(-1)^n z^n$ qui vaut $1/2$ en 1 mais dont la série entière ne cv pas.

2. Propriétés analytiques

(a) Continuité, dérivation et intégration de séries entières

- RCV de la dérivée, de la primitive
- Lien entre a_n et les dérivées successives de f
- Interversion somme-limite, somme-intégrale à l'intérieur du disque ouvert de convergence

(b) Développements en série entière

- Définition DSE en 0, en c
- Contre-exemple e^{-1/x^2} en 0
- Principe des zéros isolés
- Principe du prolongement analytique
- Application : prolongement de Γ via la formule des compléments
- Egalité de séries entières via l'égalité des dérivées successives

(c) Equations différentielles linéaires et séries entières [TE1MP] chap 17 p1105 sur les EDL

- Exemple d'EDL et solutions DSE
- Equation d'Airy

3. Fonctions génératrices [TE1MP] chap 16 VI) p949

- Définition
- Lemme dérivable en 1 ssi espérance finie
- Lemme deux fois dérivable
- Fonction génératrice de la somme de va indépendantes
- **Modèle de Galton-Watson**

3.245 Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Interprétation géométrique des équations de Cauchy-Riemann ?
2. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. $|f(z_0)| \leq C\,||f||_1$. L'applicatiuon $ev_{z_0} : f \in H \to f(z_0) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, où $H = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$ est l'espace de Bergman du disque unité. (Développement : c'est un Hlbert). Trouvez une expression explicite de cette forme linéaire continue.
3. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. On note $\Re(f) = p$ et $\Im(f) = q$ et on suppose $\frac{p}{q} = cste$. Que cela signifie-t-il géométriquement ?
4. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante. Soit $U \subset \Omega$ un ouvert. Montrer que $f(U)$ est ouvert.

Réponses

1. Mot-clé attendu : Similitude (c.f applis conformes et conservations des angles). Si f holomorphe alors la différentielle s'interprète comme une similitude du plan.
2. Il existe $u_0 \in H$ tel que $f(z0_) = \langle f, u_0 \rangle = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{\pi} \frac{f(z)}{1 - \overline{z}z} d\lambda(z)$ par Riesz. On a $u_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle u_0, e_n \rangle e_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi} (\overline{z_0}z)^n = \frac{-1}{\pi} \frac{1}{(1 - \overline{z_0}z)^2}$
3. L'image de f est une droite. C'est donc un fermé de $\mathbb{C}$. Or f est holomorphe donc ou bien son image est ouverte (impossible), ou bien c'est une constante : c'est donc une constante.

Motivations

Les fonctions à variable complexe diffèrent fondamentalement des fonctions à variable réelle. Les notions de continuité sont proches (le module prolonge la valeur absolue), pourtant l'un des théorèmes les plus faciles à mettre en défaut dans $\mathbb{C}$, le théorème des valeurs intermédiaires, montre déjà cette différence.
Les fonctions holomorphes (DSE) sont une classe très restreinte de fonctions, et leurs propriétés sont donc nombreuses : analycité, principe du maximum, théorème de Liouville...
L'intégrale curviligne prolonge la notion d'intégration réelle (sauf que sur $\mathbb{R}$ on peut toujours paramétriser un segment par un chemin de vitesse 1).

Métaplan :
Cadre : Ω ouvert de $\mathbb{C}$

1. $\mathbb{C}-$dérivabilité
   (a) Définitions et équations de Cauchy-Riemann [Tau]
      - Définition $\mathbb{C}$-dérivabilité

   (b) Les logarithmes complexes [7]

7. Peut-être à raccourcir. C'est chaud à faire tenir ça + les séries de Laurent (la partie sur les résidus s'en trouve amincie)

- Définitions de l'argument, de Log
- Exemples / contre-exemples

2. Intégrale complexe [Tau]
   (a) Définitions
   - Intégrale sur un chemin
   - Chemins équivalents
   - Indépendance du chemin équivalent choisi

   (b) Primitives et formule de Cauchy
   - Lemme de Goursat
   - Cauchy sur les convexes
   - Formule de Cauchy
   - Réciproque : théorème de Morera et caractérisation de l'holomorphie

   (c) Holomorphie sous le signe intégral [8]
   - Théorème d'holomorphie sous le signe intégral [ZuQu]
   - Application à l'holomorphie de Γ sur $\{Re > 0\}$

3. Principe du maximum et applications [Tau] chap 7.1 et 7.2
   - Inégalité de Cauchy [Tau] ou [Rem]
   - Gutzmer + Principe du maximum [Rem]
   - Application à la convergence de suites de fonctions holomorphes
   - Liouville
   - Théorème de D'Alembert-Gauss

4. Singularités isolées et exemples de fonctions méromorphes
   (a) Singularités isolées et résidus
   - Déf singularités de 3 types + exemples frac rationnelles et $e^{1/z}$
   - Définition série de Laurent
   - Définition résidu à l'aide du DSL
   - Théorème des résidus
   - Application : **Formule des compléments de Γ via le théorème des résidus**

   (b) Etude du cas particulier de ζ
   - Théorème d'holomorphie sous le signe intégral [ZuQu] si pas mis avant
   - **Prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ de ζ**

8. Possible de le mettre à l'arrache à la fin dans la partie ζ

3.246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :
Leçon du 27/01 - Eva Pirot & Nolwen Trellu avec Bachir Bekka

Questions

1. Qu'est-ce que $L^1_{2\pi}$?
2. Énoncer le théorème de Baire, donner une idée de preuve.
3. Montrer que $V_n : f \in \mathcal{C}^0_{2\pi} \mapsto f * K_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k(f)(n)$ est continu
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique intégrable sur $[0, 2\pi]$. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_a^{a+2\pi} f(t)dt$
5. Quand f est $\mathcal{C}^2$, pourquoi la série de Fourier converge uniformément vers f ? Indication : que peut-on dire des coefficients de Fourier ?
6. Si on remplace C^2 par $\mathcal{C}^1$?
7. Pourquoi est-ce que $g(x) := \sum c_n(f)e^{inx}$ est égal à $f(x)$ lorsque l'on a CVU ?

Réponses

1. $L^1_{2\pi} : \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ mesurable 2π périodique ; $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|dt < +\infty\}$
2. [GouAn] p418
3. $|V_n(f)| \leq \dfrac{1}{2\pi} ||f||_{L^1} \displaystyle\int_0^{2\pi} K_n(t)dt$ donc $|V_n(f) \leq ||f||_\infty|$
4. Changement de variable (sans déconner ?)
5. On peut redémontrer par deux IPP que $c_n(f) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
6. Soit $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$. On a $c_n(f) = \dfrac{1}{in}c_n(f')$. L'idée est d'utiliser Cauchy-Schwarz et Parseval :
$$\sum |c_n(f)| = \sum \frac{1}{n}\left|c_n(f')\right| \leq \sqrt{\sum \frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum |c_n(f')|^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left|\left|f'\right|\right|_{L^2} < +\infty.$$
7. Il s'agit de redémontrer l'injectivité de l'application liénaire $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.
On peut pour cela utiliser le théorème de Féjér car si f a ses coefficients nuls, alors $f * K_n$ est nulle pour tout n, donc par convergence uniforme (Féjér) on en déduit que f est nulle (au sens des fonctions définies partout).

Métaplan :

Cadre : Convention $c_n(f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{int} f(t)dt$ sauf mention contraire explicite.

1. Premières notions sur les séries de Fourier
   (a) Coefficients de Fourier, série de Fourier associée à une fonction
      - Définition coefficients de Fourier et e_n

    - Densité des polynômes trigonométriques ?
  (b) Propriétés des $c_n(f)$ pour f régulière
    - Lemme de Riemann-Lebesgue
    - Cas $\mathcal{C}^k$
2. Séries de Fourier dans L^2 [GouAn] p 259 ou [ZuQu]
  - Produit scalaire et définition du "L^2 Fourier" (intégrale sur $[0, 2\pi]$)
  - Inégalité de Bessel
  - Formule de Parseval
  - Base hilbertienne + isomorphisme l^2 et L^2
  - Conséquences : [GouAn] p260 : $c_n(f) = 0 \Rightarrow f$ nulle, CVU entraîne S égale à f.
3. Noyaux trigonométriques et résultats de convergence [ZuQu]
  (a) Noyau et théorème de Féjér
    - Définition et expression du noyau de Féjér
    - **Théorème de Féjér**
    - Conséquences [ZuQu] (Densité polynômes trigonométriques, (la limite simple est f si existence, si CVN alors égalité), cas $\mathcal{C}^1_{pm}$ via Césaro)
    - Contre-exemple Banach-Steinhaus
  (b) Noyau et théorème de Dirichlet
    - Définition et expression du noyau de Dirichlet
    - Théorème de Dirichlet
    - Conséquence $\mathcal{C}^1_{pm}$ par Dirichlet
  (c) Noyau et phénomène de Gibbs
    - ?
4. Quelques applications
  (a) Formule sommatoire de Poisson
    - /!/ Seul endroit où on change la convention en $e^{2i\pi\cdot}$
    - **Formule sommatoire de Poisson**
  (b) Application aux EDP : résolution de l'équation de la chaleur [XENSAn4]
    - **Solution DSF $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation de la chaleur**

3.250 Transformation de Fourier. Applications.

Références : Gasquet-Witomski, Golse, Ouvrard 2
Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Clculer la TF de $\mathbb{1}_[-1,1]$.
2. Calculez la TF de la fonction caractéristique de la loi de Cauchy $x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

3. On note $g = sinc$. Calculez $\hat{g}$. Question préliminaire : calculez la TF de la valeur principale de $1/x$.

Réponses

1. On obtient $2sinc$.
2. Pour la loi de Cauchy, on a $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}e^{-ixt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}e^{-ixt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_-} e^{t}e^{-ixt}dt = \cdots = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\hat{\varphi}(x)}{x}dx &= \int_{x>\varepsilon} \frac{\hat{\varphi}(x)}{x}dx + \int_{x<-\varepsilon} \frac{\hat{\varphi}(x)}{x}dx \\ &= \int_{x>\varepsilon} \frac{1}{x}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-|y|}dy\right)dx + \int_{x<-\varepsilon} \frac{1}{x}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-|y|}dy\right)dx\end{aligned}$$

L'idée est d'appliquer Fubini.
On a $g \in L^2$ mais $g \notin L^1$.

Motivations

La transformation de Fourier est un outil avec des applications très concrètes, et les algorithmes de transformée de Fourier rapide sont aujourd'hui très utilisés notamment en traitement du signal (exemple : compression d'images).
Sur le plan théorique, la transformée de Fourier peut se définir sur une variété assez large d'espaces fonctionnels (espace L^1 donc $\mathcal{C}^k$ lorsque le domaine est borné, mais aussi $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ et donc L^p). Ses applications vont du calcul d'intégrale (transformée de la gaussienne et application à la fonction theta) à la résolution d'EDO et d'EDP (équation d'Airy, de la chaleur, de Schrödinger...), en passant par les probabilités (fonctions caractéristiques).

Métaplan :

Cadre : Transformée de Fourier définie comme dans le Gasquet-Witomski : $\int e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx$. On fait de la TF sur $\mathbb{R}$.

1. Transformée de Fourier dans L^1 et L^2 [GasWit] p137+
   (a) Définition intégrale dans L^1, premières propriétés
      - Exemple TF indicatrice
      - Riemann-Lebesgue
      - Convolution

   (b) Prolongement à L^2
      - Définition dans $L^1 \cap L^2$
      - **Théorème de Fourier-Plancherel**
      - Application : calcul de certaines TF [GasWit] p161
      - **Polynômes orthogonaux**

2. Transformée de Fourier dans $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ [GasWit]
   (a) TF dans l'espace de Schwarz $\mathscr{S}$ et stabilité
      - Définition classe de Schwarz + exemple de la gaussienne
      - TF de la gaussienne (méthode : th résidus avec un rectangle, équa diff, zéros isolés)
      - Stabilité de $\mathcal{S}$ par multiplication + fonctions à croissance au plus polynômiales
      - Stabilité de $\mathcal{S}$ par TF et isomorphisme

   (b) TF de distributions tempérées [GasWit] p231
      - Définition
      - Prototypes de fonctions $\mathcal{S}'$: les fonctions L^p, les fonctions à croissance au plus polynômiale... [Gol] p162
      - Exemples [GasWit] p233
3. Applications de la transformée de Fourier
   (a) Fonctions caractéristiques en proba
      - Inversion de Fourier $\Rightarrow$ caractérisation de la loi par la fonction caractéristique

   (b) Applications à la résolution d'EDO et EDP [DavGos]
      -

3.253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 22/04 - Thomas Bouchet et Sophie Jaffard avec Miguel Rodrigues.
Questions

1. Y a-t-il une démonstration plus courte de Stampacchia dans le cas a symétrique ?
2. Soit A symétrique réelle. A quelle condition $f : x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ est-elle convexe ?
3. Soit H hilbert et $f : H \to \mathbb{R}$ continue convexe. Montrez que f est sup de fonctions affines.
4. (questions supplémentaires possibles) : Caractérisation de la convexité avec la dérivée mais au sens des distributions. (exemple : $f \in L^1_{loc}$)

Réponses

1. ?
2. On a une fonction $\mathcal{C}^1$, donc on calcule sa différentielle :
$$\langle A(x+h), x+h\rangle = f(x) + 2\langle Ax, h\rangle + o(h)$$
d'où $D_x f = 2\langle Ax, \cdot\rangle$, ou encore $\nabla f(x) = 2Ax$. Donc $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y\rangle = 2\langle A(x-y), x-y\rangle$ qui est positif pour tous x, y ssi A est symétrique positive, d'où le résultat par le théorème 22.
3. On considère C l'épigraphe de f et

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. Ensembles convexes, fonctions convexes
   (a) Ensembles convexes
      - Défintion
      -
   (b) Fonctions convexes
      - Caractérisation des fonctions convexes
      - Inégalités des 3 pentes
      - Inégalité de Jensen
      - Application : Inégalité arithmético-gométrique, ...
2. Quelques applications de la convexité
   (a) Applications en probabilités [BarLed]
      - Jensen version probabiliste : inégalité sur l'espérance
      - Application : bornitude (?) de la fonction caractéristique
      - Autre application : Hölder (toujours [BarLed], p37)
   (b) Applications en analyse complexe
      - Analyse complexe : formule de Cauchy sur un convexe (vrai pour simplement connexe mais + facile en convexe : on intègre sur un segment)
   (c) Applications en géométrie
      - **Ellipsoïde de John Loewner**
3. Convexité et optimisation
   (a) Généralités
      - Fonctionnelles quadratiques
   (b) Optimisation dans un Hilbert
      - **Optimisation d'une fonctionnelle convexe dans un convexe fermé d'un Hilbert**

Remarques générales : bonne approche du plan (dire ce qui est utile, utilisé en pratique, etc). Passé un peu trop de temps sur le basique. Dans le rapport : ne pas s'apesantir sur les propriétés/déf de bases. Un intermédiaire serait de les mettre dans le plan mais de ne pas en parler. Enoncé de l'appli 15 : un peu frustrant (pas de "Alors [...]").
Dans un développement : commencer par annoncer les morceaux de son développement (1minute).

3.261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Soit une suite de v.a $X_n \to \mathscr{P}(n)$. On considère $u_n = P(x_n \neq n)$ et $S_n =$. Montrer que

Réponses

1. On a $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ avec Y_i indépendantes suivant une loi de poisson de paramètre 1. Par loi des grands nombres appliquée à Y_n, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to 1 = \mathbb{E}(Y_1)$

Motivations

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

3.262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Questions

1. Quelles sont les implications entre convergences ?
2. Intérêt de la cv en loi ?
3. Donner la définition des cv
4. Montrer que si $X \in L^1$, alors $\lim_{c \to +\infty} \int_{|X|>c} |X| d\mathbb{P} = 0$
5. Comment caractériser les ensembles relativement compacts de L^1 ? Montrer : $\mathscr{F} \subset L^1(\Omega, \mathbb{P})$ est relativement compacte ssi $\mathscr{F}$ est équi-intégrable.
6. Complétude de $L^p(\Omega)$?
7. Si X_n CV en proba, comment extraire une sous-suite qui CV presque sûrement ? (rq : cela montre aussi que l'on ne peut pas métriser la convergence presque sûre car puisque la CVP est métrisable, cela impliquerait que les deux topo sont équivalentes ce qui n'est pas vrai car il existe des va qui ne cv pas p.s mais qui cvP.)
8. D'autres exemples de mesures de proba que les mesures à densité et les diracs ?
9. Comment construire une suite de v.a.i.i.d de loi de Bernouilli de paramètre p ?

Réponses

1. $L^p \longrightarrow L^1 \longrightarrow \mathbb{P} \longrightarrow$ loi et $CVp.s \longrightarrow \mathbb{P}$.
2. Pour CVL^p, p.s et $\mathbb{P}$, les v.a doivent être sur le même espace. Pour la CV en loi, il n'y a pas besoin de cela et on peut comparer / étudier des v.a définies sur des espaces prob différents.

3. .
4. Convergence dominée avec $\mathbb{1}_{|X|>c}|X|$.
5. ?
6. Riesz-Fischer
7. C.f openboard
8. Mesures singulières : pas d'atome et pas absolument continue (i.e pas à densité) par rapport à Lebesgue. (exemple : mesure dont la fonction de répartition est donnée par "l'escalier du diable"). Concrètement il existe une mesure μ telle que $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} d\mu(t)$ où F l'escalier du diable.
9. On considère la pseudo-inverse de Lévy. Si μ est une mesure quelconque, on considère $X : t \mapsto \inf\{y \in \mathbb{R},\ F(y) \geq t\}$ où $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} d\mu(t)$.
10.

Métaplan :
Cadre :

1. (a) •
   (b) •
2. (a) •
   (b) •
3. (a) •
   (b) •

Remarques : Développement (Vitali) un peu long. On peut à l'inverse commencer par le théorème et faire le lemme d'équiintégrabilité si on a le temps.

3.264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Rapport du jury 2020 :

Leçon du 12/05 - Diego Condori et Eva Pirot avec Jürgen Angst
Questions

1. Soit $X \to \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de la partie entière Y de X ?
2. Trouver la loi d'une somme de deux lois de Poisson.
3. Si $Y_i \to \mathcal{B}(p)$ iid, montrez que $X_n = \displaystyle\sum_1^n Y_i \to \mathcal{B}(n,p)$.
4.

Réponses

1. Loi géométrique (décalée).
2. Avec les fonctions génératrices.
3. Théorème central-limite. (que l'on prouve en regardant la fonction caractéristique en 0).

Motivations

Les variables aléatoires discrètes, qui sont les premières que l'on rencontre dans notre scolarité (et dans notre vie : pile ou face), sont un outil intéressant pour modéliser un grand nombre de phénomènes (physiques, économiques, ...).
L'espérance, généralisation de la notion de moyenne pondérée sur un nombre fini de valeurs, permet d'estimer la valeur autour de laquelle une v.a va arriver ; les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev précisent ceci. Ces dernières inégalités permettent d'aboutir aux lois des grands nombres, qui correspondent à ce que l'on peut observer en pratique : souvent, lorsque l'on réalise un grand nombre d'expériences, le résultat que l'on trouve est proche de l'espérance.
Les fonctions génératrices font le lien avec les séries entières, et sont un outil efficace de caractérisation de lois de variables discrètes, mais aussi de calcul de lois de sommes de variables discrètes indépendantes.

Métaplan :
Cadre : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Définitions et lois usuelles [TE1MPSI] [TE1MP]
   (a) Premières notions
   - V.a discrète
   - Espérance, variance
   - formule de transfert

   (b) Lois usuelles et utilisations
   - Uniforme
   - Bernouilli = pile ou face
   - Binomiale = n Bernouilli indépendantes = n lancers de pile ou face
   - Géométrique = loi du premier succès
   - Poisson = Binomiale avec n grand et p petit ($\lambda = np$) = loi des événements rares

   (c) Couples de variables aléatoires et indépendance [TE1MP]
   - Loi conjointe, loi marginale
   - Indépendance de variables aléatoires
   - Lemme des coalitions
2. Espérance, variance de variables discrètes [**?**]
   (a) Définitions
   - Déf moment d'ordre p
   - Espérance linéaire, variance "quadratique"
   - Espérance d'un produit de v.a indépendantes
   - Inégalités espérance type Minkowski
   - Formule de Koenig-Huygens
   - Théorème caractérisation loi par les moments d'ordre p

- Covariance, variables correllées, contre-exemple

(b) Inégalités, lois des grands nombres, intervalles de confiance

- Markov, Bienaymé-Thebychev
- Loi faible des grands nombres
- Définition intervalle de confiance
- **Aiguille de Buffon**

3. Fonctions génératrices [TE1MP]

(a) Définitions et propriétés de caractérisation de la loi

- Définition, fonction génératrice des lois usuelles
- Caractérisation espérance finie ssi $G'(1) = \mathbb{E}[X]$
- Fonction génératrice d'une somme de va indépendantes
- **Méga tableau des lois discrètes** [PNP]
- Caractérisation de la cv en loi [Ouv2] p307

(b) Processus de Galton-Watson

- **Modèle de Galton-Watson** [PNP]

Remarques sur le dév : Hoeffding est court (10min) et ne parle pas de v.a discrètes. Donc ce sont deux raisons pour mettre une application après.

3.265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Rapport du jury 2020 :
14/10 Tiphany Chenais et Margot Turcan avec Isabelle Gruais
Questions

1.

Réponses

1.

Métaplan :
Cadre :

1. Fonctions usuelles en analyse réelle

(a) Premiers exemples

- Fonctions affines, polynômiales
- Exponentielle à partir du problème de Cauchy $y' - y = 0, y(0) = 1$ et ln
- Fonctions trigonométriques circulaires : sin, cos, tan, définition à partir de exp
- ch, sh, application ch = chaînette forme d'une chaîne suspendue

(b) Exemples de prolongements

- sinus cardinal en 0
-

(c)
-

2. Suites et séries de fonctions
   (a) Exemples de fonctions construites comme limites
      - Escalier de Cantor : dérivée nulle p.p. mais croissante
      - Fonction continue partout mais persque partout non
   (b) Suites de polynômes orthogonaux
   DEV Polynômes orthogonaux et densité dans L^P
      - Application : polynômes de Hermite comme solution $H_n(x)e^{-ax}$ de l'oscillateur harmonique quantique (équation de Schrödinger)
   (c)
      -
3. Exemples de fonctions à variable complexe
   (a) Fonction Γ d'Euler
      - Définition intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$, équation fonctionnelle
      - Gamma comme prolongement de la factorielle
      - Formule des compléments
      - Prolongement sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$, pôles simples
   (b) Fonction ζ de Riemann
      - Définition comme somme d'une série CVU sur $\{Re > 1\}$
   (c)
      -

3.266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Rapport du jury 2020 : Partir de indépendance de probas puis indépendance d'événements (2à2, mutuelle) et éventuellement tribus. Exemples simples (opérations ensemblistes), contre-ex (comme diff 2à2 et mutuelle). Il faut avoir un exemple d'espace probabilisé sur lequel est définie une suite de variables aléatoires indépendantes.[9]. De façon plus sophistiquée : exemple pages 23-25 du poly de FPR : exemple de suite de vaiid avec une loi prescrite (Bernouilli en l'occurence)

05/01 Vivien Kordinski et Abel Frappat avec Isabelle Gruais

Questions

1. Montrer l'exemple 2 du plan
2. Déf de $\limsup$ et $\liminf$

Réponses

1. Chercher r et θ (changement de variables) tels que $r^2 = X^2 + Y^2$
2. La $\limsup$ c'est la limite du sup. (sup$= \cup$ et inf $= \cap$)

Métaplan :
Cadre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Notion d'indépendance
   (a) Probabilité conditionnelle
      - Déf : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

9. On peut prendre par exemple ? ? ?

- Lien avec la probabilité conditionnelle (+ interprétation "en français")
- Bayes

(b) Indépendance d'événements et de tribus

- Définitions indépendance 2à2 et mutuelle d'événements, de tribus
- Différence 2à2 et mutuelle : exemple du pile ou face :
  Pile ou face, A = pile au premier lancer, B = pile au second lancer, C = même résultat pour les deux premiers résultats $= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$.
- Lemme des coalitions (tribus : , fonctions : [PNP] p 179-180)

(c) L'indépendance par l'expérience

- Loi de Bernouilli et Binomiale - traduction en terme de lancers indépendants
- Loi Géométrique du premier succès (sous hypothèse d'indépencance)

2. Propriétés et lois des grands nombres

(a) Premières propriétés

- Espérance
- Variance et covariance
- non corrélées =/> indépendantes [Hau] p 360 ou [PNP] p 185

(b) Théorèmes limites

- Markov
- Bienaymé - Tchebychev
- LGN faible / forte
- Théorème central-limite

3. Applications (?)

(a) Evénements asymptotiques

- Lemmes de Borel-Cantelli (1 implication et 1 équivalence pour l'indépendance)
- Singe tapant à la machine
- Contre-exemples [Ouv2] p51
- Def tribu asymptotique
- Loi du $0-1$ de Kolmogorov

DEV Applidation Borel-Cantelli + application [Ouv2] p81 [10]

(b) Un modèle d'évolution de population : Galton-Watson

- **Modèle de Galton-Watson**

Autres remarques : L'indépendance ne correspond pas toujours à l'intuition : ex : indé sur le tirage de boules numérotées de 1 à 12 : événements tirer une boule paire et tirer une boule impaire ne sont pas indépendants contrairement à ce qu'on pourrait croire.

10. Fait intervenir la loi du 0-1, d'où sa place dans le plan

3.267 Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Rapport du jury 2020 :
17/12 Soobin Lee et Dimitry Kfoury avec Miguel Rodriguez
Questions

1. Sur la cycloïde (roue de vélo), quelle est la singularité pour les points de "rebond" ?
2. Montrer que le plus court chemin entre a et b donné par le segment $[a, b]$ est plus petit que la distance sur la courbe entre a et b.
3. $\omega := Pdx + Qdy$
4. Montrer Green-Riemann
5. Quid de la réciproque de Green-Riemann ? Si sur tout contour C, $\displaystyle\int_C \omega = 0$, que se passe-t-il ?
6. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Trouver g tel que $\nabla g = f$

Réponses

1. Continu non dérivable.
2. Soit $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ sur $[0, 1]$ avec $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.
   On a $||a - b|| = l(\gamma)$ et $\displaystyle\int_0^1 \gamma'(t) = \gamma(1) - \gamma(0)$
3. Si $\omega = df$, alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = 0$ car df est fermée.
   $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_\gamma$
4. ? ? ?
5. ? ? ?
6. On note $f = (P, Q)$. On cherche $g(x, y) = \displaystyle\int_0^x P(x, y)$

Autres remarques : Défense de plan un peu trop linéaire. Récité un peu trop vite. Développement sur l'indice trop court.
Autres choses que l'on peut mettre : Théorème de Jordan en topologie (courbes de Jordan). Groupe fondamental / revêtement universel. Propriété : pour tout chemin γ et $f \in \mathcal{C}^1$, $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \displaystyle\int_a^b \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$. Théorème de Poincarré : lien forme exacte / forme fermée (de manière plus élémentaire : lien gradient / rotationnel). Lemme de Moreira. En géométrie : espace tangent, longueur $l(\gamma) = \displaystyle\int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt$ et $\mathcal{E}(\gamma) = \displaystyle\int_a^b ||\gamma'(t)||^2\, dt$. EDO Hamiltoniennes, équation du pendule, équation de Newton, formules de moyenne. Fonctions de Lyapunov. Méthode de caractéristiques en dimension 1.

Métaplan :
Cadre : $\mathbb{R}^n$ euclidien (sauf pour la partie analyse complexe).

1. Chemins et courbes paramétrées
   (a) Premières définitions
      - Définition : CP, support, chemin [RDO5] p12
      - Courbes de Jordan + fig 3 [RDO5] p13-14

(b) Propriétés métriques
   - Longueur d'un arc : équation paramétrique et équation cartésienne
   - exemple [RDO5] p99 ellipse (paramétrique)
   - Exemple avec une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cartésien)

(c) Connexité et analyse complexe [Tau]
   - Théorème de Cauchy
   - Indice d'un lacet

2. Courbes régulières et calcul différentiel

   (a) Définitions
   - Courbe régulière [RDO5] p14
   - Point critique, dégénéré ou non [RDO5] p14-15
   - Lien forme quadratique
   - Point singulier

   (b) Points critiques et points singuliers
   - Prop : si $\vec{v}$ tangent
   - Propriétés extrema et points critiques et Jacobienne/Hessienne

   DEV Lemme de Morse
   - Applcation : Si une application $\mathcal{C}^1$ s'annule sur 3 droites passant par 0 alors 0 est un point critique dégénéré

3. Sous-variétés

   (a) Définitions équivalentes

   DEV Définitions équivalentes sous-variétés
   - Exemples de sous-variétés définies différemment
   - Espaces tangents

   (b) Application à l'optimisation sous contrainte
   - Théorème des extremas liés
   - Application : théorème spectral, optimisation coût

   (c) Application aux sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ (Bonus)
   - Voir [Laf] I.E (p35-37). But : montrer que exp "correctement restreinte" paramétrise $SL_n(\mathbb{R})$. (matrices à traces nulle + formule $det(e^A) = e^{Tr(A)}$)

4 Retours d'oraux 2021

4.1 Oral d'algèbre

Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.
Développements proposés :

- **Matrices de Gram**
- **Théorème de Cayley-Hamilton**

Jury très pointilleux (voire relou). Détails demandés sur la définition d'un polynôme et d'une fonction polynômiale. L'argument attendu était celui du corps infini pour pouvoir identifier les deux notions. Il y a eu un exercice sur les barycentres, et au cours de l'exo il fallait exprimer l'aire d'un triangle quelconque en fonction du déterminant de vecteurs bien choisis. Je n'ai pas plus de souvenirs.
Développement : matrices de Gram et application. Réussi dans l'ensemble, sauf le calcul de fin (manque de temps)

Note obtenue : 11.5/20

4.2 Oral d'analyse

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications continues. Exemples et applications.
Développements proposés :

- **Théorème de Fourier-Plancherel**
- **Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $C^k(\mathbb{R})$ (pour la norme CVU tout compact toute dérivée)**

Jury très gentil. Dernier exercice de topologie/analyse sur l'espace V des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$ (?). Je n'ai plus l'énoncé en tête mais l'exo faisait appel au théorème d'Ascoli et au théorème de Banach-Steinhaus.
Développement : Fourier-Plancherel. Réussi avec quelques hésitations sur la TF de la Gaussienne et les manipulations associées.

Note obtenue : 17.5/20

4.3 Oral de modélisation

Mon texte était le B84, et parlait du contrôle d'une EDO. Les mots-clés étaient : EDO, algèbre linéaire, optimisation. La mise en situation était la suivante : on considère un balai en "équilibre" sur une main, et on s'intéresse à l'angle alpha avec la verticale (équilibre = alpha nul). Le but final du texte, je pense, était de trouver à partir d'une situation initiale avec un alpha non nul donné, la bonne manière de bouger la main sous le balai afin d'arriver à l'équilibre au bout d'un temps T donné. Cela revenait à considérer un problème de Cauchy en rajoutant en plus une condition finale. Une grande partie du texte était consacrée au cas linéaire, et à l'utilisation de l'algèbre linéaire pour montrer un théorème sur le contrôle de l'équation linéaire. Apparemment c'est un théorème classique (après avoir discuté avec Paul Maurer, j'ai appris qu'il en faisait un développement en algèbre), mais le nom du théorème n'était pas marqué. Mais il énonçait si ma mémoire est bonne que le système linéaire $y' = Ay + B$ était contrôlable ssi la matrice par blocs $BABAB...A^(n-1)B]$ était de rang maximal (n étant la taille de A (?)). La démonstration était plutôt détaillée, et il restait peu de trous à remplir. Il y avait également une partie optimisation à la fin, où on adaptait la méthode du gradient à une fonction à valeurs dans un $\mathbb{R}^p$ avec p plus grand que 1. L'idée était d'essayer de trouver l'accélération u nécessaire à donner à la main pour que le balai revienne en équilibre. On se retrouvait à minimiser une certaine fonction de l'angle alpha, et on nous guidait pour aboutir à la solution. Je n'ai pas eu le temps de finir cette partie mais j'ai eu le temps de montrer le code que j'avais essayé.

Ma préparation s'est bien déroulée, j'ai eu le temps de faire beaucoup de simulations (je suis arrivé devant le jury avec 7 figures et pas mal de code) et de faire quelques bonus qui n'étaient pas proposés dans le texte (estimation de l'erreur en log/log). Le fait qu'on puisse s'entraîner avec exactement la même interface pendant les oraux blancs est très utile je trouve. Je m'inquiétais d'ailleurs un peu de savoir si on pouvait avoir accès à la documentation scilab/python pendant l'épreuve, donc j'avais appris les noms de fonction, mais au final la documentation fournie est très complète (il y a toutes les fonctions de numpy, scipy, matplotlib...) et pratique d'utilisation. Les questions se sont un petit peu moins bien passées. J'ai réussi à répondre mais pas assez rapidement à mon goût. Les questions étaient très classiques : définissez l'ordre de convergence, interprétez physiquement vos courbes (positions d'équilibre sur les graphes donnant alpha, par exemple), connaissez-vous d'autres méthodes que Euler explicite, ... Une des questions qui m'a posée problème était : expliquez le lien entre méthode d'intégration numérique et d'intégration d'équations différentielles pour la méthode des trapèzes / Crank-Nicholson. En fait, j'ai tardé à écrire la formule de Duhamel et donc je n'arrivais pas à retrouver le lien précis. La dernière question dont je me souviens était une question sur Cauchy-Lipschitz : essentiellement, on me demandait si on pouvait changer $[0, T]$ en $\mathbb{R}_+$ dans le théorème (ici c'était bien le cas, et la justification que j'ai donné pour l'unicité était d'appliquer l'unicité au fur et à mesure sur des segments de la forme $[0, n]$)

Note obtenue : 15.5/20

5 Bibliographie

Références

[All] Allaire Grégoire, Analyse numérique et optimisation

[AM] Amar et Mathéron, Analyse complexe

[PNP] Appel Walter, Probabilités pour les non-probabilistes

[Ave] Avez André, Calcul différentiel

[BarLed] Barbe, Ledoux, Probabilité

[Ber] Bernis J., Bernis L., 40 développements pour l'agrégation de mathématiques

[Berth] Berthelin Florent, Equations différentielles

[Bre] Brezis Haim, Analyse fonctionnelle, Seconde édition

[BrPa] Briane, Pagès, Théorie de l'intégration, 4e édition, Vuibert

[ObA] Beck, Malick, Peyré Objectif agrégation, Seconde édition

[H2G21] Caldero P., Germoni J., Histoires hédoniques de groupes et géométrie tome premier

[NH2G22] Caldero P., Germoni J., Nouvelles histoires hédoniques de groupes et géométrie tome second

[Cia] Ciarlet P.G., Introduction à l'analyse numérique matricielle et optimisation

[Col] Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)

[DavGos] David C., Gosselet P., Equation aux dérivées partielles. Cours et exercices corrigés.

[Dem] Demailly Jean-Pierre, Analyse numérique et équations différentielles

[TE1MPSI] Deschamps, Moulin, Warusfel Mathématiques tout-en-un MPSI

[TE1MP] Deschamps, Moulin, Warusfel Mathématiques tout-en-un MP

[DiM] Di Menza Laurent, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Cassini

[Fil] Filbet Francis, Analyse numérique, 2e édition, Dunod

[XENSAn1] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 1

[XENSAn2] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 2

[XENSAn3] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 3

[XENSAn4] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 4

[XENSAl1] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 1

[XENSAl2] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 2

[XENSAl3] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 3

[GasWit] Gasquet C., Witomski P., Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique, ondelettes.

[Gol] Golse François, Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles

[GouAl] Gourdon Xavier, Algèbre, 3e édition

[GouAn] Gourdon Xavier, Analyse, 3e édition

[Goz] Gozard Yvan Théorie de Galois

[Gri] Grifone Joseph, Algèbre linéaire, 4e édition

[Hau] Hauchecorne Bertrand , Les contre-exemples en mathématiques

[HirLac] Hirsch, Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle

[Laf] Lafontaine Jacques, Introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences, 1998

[131D] Lesevre D., Montagrnon P., Le Barbenchon P., Pierron T., 131 développements pour l'oral, Dunod

[MaMn] Mansuy R., Mneimé R., Réduction des endomorphismes

[MnTi] Mneimé R., Tiestard F., Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Hermann, 1986

[Ouv2] Ouvrard Jean-Yves, Probabilités 2, Cassini

[Per] Perrin Daniel, Cours d'algèbre

[Pom] Pommellet, Cours d'analyse

[QuTo] Queffélec Hervé, Topologie, cours et exercices corrigés, 4e édition, Dunod

[RDO5] Ramis, Deschamps, Odoux, Cours de mathématiques spéciales, Tome 5, Application de l'analyse à la géométrie

[Rem] Remmert Reinhold, Bruckel R.B., Theory of complex functions

[Rou] Rouvière François, Petit guide de calcul différentiel

[Rud] Rudin Walter Analyse réelle et complexe

[dSP] de Séguin Pazzis Clément, Invitation aux formes quadratiques, 2010

[Tau] Tauvel Patrice Analyse complexe pour la licence 3 Dunod

[TauGeo] Tauvel Patrice Cours de Géométrie Dunod

[Ulm] Ulmer Félix, Théorie des groupes

[UlmAnar] Ulmer Félix, Anneaux et arithmétique

[MdM] Zavidovique Maxime, Un max de maths

[ZuQu] Zuily, Quéffelec Analyse pour l'agrégation, Quatrième édition

[Zui] Zuily, Elements de distributions et d'équations aux dérivées partielles