Densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$

Notions utilisées : Théorie de la mesure (fonctions étagées, Fubini, etc), théorème de convergence dominée, fonctions plateaux, densité d'espaces fonctionnels, (approximation par) convolution.

Motivations

L'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est un espace extrêmement petit par rapport à certains espaces de fonctions usuels comme les L^p ou les C^k pour $k \in \mathbb{N}$. Pourtant, il est dense dans beaucoup de ces espaces (mais pas tous, c.f L^∞), ce qui permet de prouver certains résultats assez généraux en se ramenant à des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Cela permet d'éviter certains aspects techniques : fonctions peu régulières ou non intégrables, termes de bords dans des IPP...

Pour une question de simplicité (c.f arguments sur fonctions mesurables positives), les fonctions considérées seront à **valeurs réelles**. Bien sûr, une fois le Théorème 3 prouvé on peut étendre sans difficulté aux fonctions complexes (laissé en exercice).

Résultats préliminaires

Suivant le temps dont on dispose à l'oral, on peut supposer déjà construite une fonction $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ positive à support dans $(-1, 1)$ d'intégrale 1 et à valeurs dans $[0, 1]$ (voir [1, Chapitre IX, section III.2]). Essentiellement, la construction provient de manipulations et de raccords $\mathcal{C}^\infty$ autour de la fonction $\exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right)$ tronquée hors de $[-1, 1]$.

Lemme 1. *L'espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans l'espace $\left(L_c^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ des fonctions L^p à support compact pour tout $p < +\infty$.*

Preuve. On remarque tout d'abord que l'ensemble des fonctions étagées à support compact $\mathcal{E}_c$ est dense dans L_c^p. En effet, si $f \in L_c^p$ est positive de support K, par définition de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive,

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_K f = \sup\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\,;\, \varphi \in \mathcal{E},\, 0 \le \varphi \le f \text{ pp.}\right)$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions étagées positives. Ici le supremum peut être pris sur les fonctions φ à support inclus dans K. Ainsi, par caractérisation de la borne supérieure, on peut approcher f en norme L^1 par une suite $\varphi_n \in \mathcal{E}_c$. Par compacité du support de f, φ_n approche f également en norme L^p. On en déduit le résultat pour $f = f_+ - f_-$ (partie positive, resp. négative, de f) dans le cas général $f \in L_c^p$.

Ensuite, il suffit de voir que l'on peut approcher (en norme L^p) n'importe quelle indicatrice d'intervalle par une fonction continue à support compact (affine par morceaux par exemple). On peut donc approcher n'importe quelle indicatrice d'ouvert de $\mathbb{R}$ (car tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts [1]). Par régularité de la mesure de Lebesgue, on approche donc n'importe quelle indicatrice, et donc n'importe quelle fonction étagée, en norme L^p. Donc $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L_c^p(\mathbb{R})$. $\square$

Lemme 2 (Continuité des translations)**.** *Pour $h \in (-1,1)$ et $f \in L_c^p$, on note $\tau_h : f \mapsto f(\cdot - h)$ la translation de f par h. Alors pour tout $f \in L^p$, $\tau_h f \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} f$ en norme L^p.*

Preuve. D'après le Lemme 1, il suffit de prouver le résultat dans le résultat $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$. On utilise le théorème de convergence dominée (version L^p) avec la majoration $|f(x-h) - f(x)| \leq 2\,\|f\|_\infty^K$ où le compact $K := \{y \in \mathbb{R}\,;\, d(y,K) \leq 1\} = (d(\cdot,K))^{-1}([-1,1])$ est choisi pour que $\operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(\tau_h f) \subset K$. C'est la continuité de f qui assure que $\|f\|_\infty^K < +\infty$ et que f_n converge simplement vers f. $\square$

Résultat principal

Théorème 3. *Soit $p \in [1,+\infty)$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.*

Preuve. L'idée est de prouver que $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})} = \overline{L_c^p} = L^p$ au sens de l'adhérence pour la norme $\|\cdot\|_p$.
Etape 1 : L_c^p est dense dans L^p.

Si $f \in L^p$ alors $f_n(x) := \mathbb{1}_{[-n,n]}(x) f(x) \in L_c^p$ converge simplement vers f et, par théorème de convergence dominée (version L^p), converge en norme L^p vers f.
Etape 2 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans L_c^p.

Soit $f \in L_c^p$. On considère construite une fonction $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ positive à support dans $(-1,1)$ d'intégrale 1 et à valeurs dans $[0,1]$. On considère la fonction $\rho_n := n\rho(n\cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ qui est positive, à support dans $(-1/n, 1/n)$, d'intégrale 1 et à valeurs dans $[0,1]$. On remarque que $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: le caractère régulier se montre par théorème de dérivation sous le signe intégral et la compacité du support provient de la compacité du support de ρ_n et de f. On va maintenant montrer que $\rho_n * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to f \in L_c^p$ en norme L^p.

L'argument repose sur une manipulation de l'inégalité de Hölder et sur la continuité des translations. On note q l'exposant conjugué de p. L'expression de $\rho_n * f - f$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\rho_n * f - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)\,(f(x-y) - f(x))\,dy &= \int_{\mathbb{R}} n\rho(u)\left(f\left(x - \frac{u}{n}\right) - f(x)\right)\frac{du}{n}\\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(u)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(f\left(x-\frac{u}{n}\right) - f(x)\right)du\end{aligned}$$

1. c.f votre cours préféré de théorie de la mesure.

d'où, par inégalité de Hölder :

$$|\rho_n * f - f|(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\rho(u)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \left(f\left(x-\frac{u}{n}\right)-f(x)\right)\right| du \leq \left(\int \rho\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int \rho(u) \left|f\left(x-\frac{u}{n}\right)-f(x)\right|^p du\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On en déduit finalement, par Fubini-Tonelli :

$$\|\rho_n * f - f\|_p^p \leq \int \rho(u) \times \left(\int \left|f\left(x-\frac{u}{n}\right)-f(x)\right|^p dx\right) du \leq \int \rho(u) \times \left\|f\left(x-\frac{u}{n}\right)-f(x)\right\|_p^p du.$$

On utilise finalement encore une fois le théorème de convergence dominée (version L^1). La convergence simple provient du Lemme 2 : $\rho(u)\left\|f\left(x-\frac{u}{n}\right)-f(x)\right\|_p^p = \rho(u)\left\|\tau_{u/n}f - f\right\|_p^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La domination est donnée, par exemple, par

$$\rho(u)\left\|f\left(x-\frac{u}{n}\right)-f(x)\right\|_p^p \leq \rho(u)(2\|f\|_p)^p.$$

On en déduit que $\|\rho_n * f - f\|_p^p \to 0$, ce qui était le résultat recherché. □

Questions possibles

1. Et pour $p = +\infty$?
2. Quels résultats peut-on montrer ?

Réponses

1. Le résultat est faux, et cela vient du fait que $\mathcal{C}^0$ n'est pas dense dans les fonctions étagées pour la norme infini. Par exemple, aucune suite de fonctions continues ne peut converger uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{1}_{[-1,1]}$. (la limite uniforme d'une suite de fonctions continue doit forcément être continue).
2. Lemme de Riemann-Lebesgue (mais c'est utiliser un résultat fort pour peu). On peut aussi citer le lemme de Poincarré en EDP (on peut le prouver d'abord pour des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ puis passer à H_0^1 par densité).

Références

[1] Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation, 5e édition.