Décomposition de Dunford

Notions utilisées : Polynômes d'endomorphismes, Lemme des noyaux et théorème de Bézout

Motivations

La décomposition de Dunford a de nombreuses applications, à commencer par les calculs d'exponentielles de matrices. C'est en quelque sorte une version améliorée de la trigonalisation (comme la réduction de Jordan).

Lemme 1. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $F = b\prod_{1}^{s} M_i^{a_i} \in \mathbb{K}[X]$ *(DFI) annulant* f. *On note* $N_i := \mathrm{Ker}(M_i^{a_i}(f))$. *Alors* $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ *et le projecteur* p_i *sur* N_i *parallèlement au reste est un polynôme en* f.

Preuve. Pour $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, c'est le lemme des noyaux.

Pour le reste, l'idée est de construire les projecteurs à l'aide d'une relation de Bézout.

Etape 1 : Construction des p_i comme des polynômes en f.

On pose $Q_i = \prod_{i \neq j} M_i^{a_i}$. Ces Q_i sont premiers entre eux (dans leur ensemble), donc par le théorème de Bézout, il existe des U_i tels que

$$\sum U_i Q_i = 1.$$

En particulier en appliquant f, $\sum U_i Q_i(f) = f$. On est amené à poser $p_i = U_i Q_i(f)$. On a $\sum p_i = id_E$.

Etape 2 : Montrer que ce sont des projecteurs sur N_i.

On a $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ car $Q_i Q_j$ annule f ssi $i \neq j$. Donc de la relation de Bézout on déduit en composant par p_i que

$$p_i = \sum p_i \circ p_j = p_i^2$$

d'où p_i projecteur.

Ensuite, on montre $\mathrm{Im}(p_i) = N_i$ par double inclusion.

- Si $y = p_i(x)$ alors pour $j \neq i$, $M_j^{a_j}(f)(y) = M_j^{a_j}(f)(p_i(x)) = F(f)(x) = 0$ d'où $y \in N_i$.
- Si $y \in N_i$, i.e $M_j^{a_j}(y) = 0$, alors puisque $\sum p_i = id_E$, on a $y = \sum p_i(y) = p_i(y)$ et donc $y \in \mathrm{Im}(p_i)$.

Remarque 2. *Méthode 2 : montrer que* $\mathrm{Ker}(p_i - id_E) = N_i$, *ce qui peut se faire par équivalence.*

Etape 3 : Montrer $\mathrm{Ker}(p_i) = \bigoplus_{i \neq j} N_j$**.**

Pour $j \neq i$ on a $N_j \subset \mathrm{Ker}(p_i)$ car $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ pour tout $x \in N_j$ car $M_j^{a_j}$ divise Q_i. Donc $\bigoplus_{i \neq j} N_j \subset \mathrm{Ker}(p_i)$.

Réciproquement, si $p_i(x) = 0$ alors $x = \sum x_k$ et $x_i = 0$ en appliquant p_i, d'où l'inclusion réciproque. □

Théorème 3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathbb{K}[f]^2$ tels que d soit diagonalisable, n nilpotente et $f = d + n$.*

Preuve. **Etape 1 : Existence.**

On note $\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{a_i}$. On pose alors comme précédemment avec $N_i = \mathrm{Ker}((f - \lambda_i id_E)^{a_i}$ les projecteurs p_i sur N_i. On a $p_i \in \mathbb{K}[f]$. On pose alors $d := \sum_{i=1}^{p}$ $lambda_i p_i$. Construit de cette manière, d est diagonalisable car on peut construire sur chaque sous-espace N_i une base propre pour p_i, puis regrouper en une base $\mathcal{B}$ diagonalisante pour tous les p_i. Dans cette base, d correspond donc bien à la matrice D diagonale contenant les valeurs propres comptées avec multiplicité. On pose alors $n = f - d = \sum_{i=1}^{p} (p_i \circ f) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i = (f - \lambda_i id_E) p_i$. On a, puisque $p_i \circ p_j = \delta_{i,j}$:

$$n^q = \sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i id_E)^q p_i.$$

d'où, puisque tout $(f - \lambda_i id_E)$ est nilpotent, n est nilpotent.

Etape 2 : Unicité.

Si $f = d + n = d' + n'$ alors $d - d' = n - n'$ est diagonalisable (car d et d' commutent comme polynômes en f donc sont codiagonalisables) et nilpotent donc nul. □

Références

[GouAl] Xavier Gourdon, Algèbre, 2e édition