Modèle de Galton-Watson

229, 264, 266 - [PNP] p 195

Notions utilisées : Indépendance, probas discrètes, étude de fonctions et de points fixes, suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Motivations

Proposer un modèle simple pour étudier par exemple la postérité d'un nom de famille, ou en adaptant le modèle l'extinction ou non d'une espèce donnée.

Cadre : On modélise le nombre d'individus à la génération n par la variable aléatoire Z_n. On modélise de plus le nombre de descendants de chaque individu par la variable aléatoire $X_n^{(k)}$, et on suppose que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, ce qui correspond à une hypothèse que chaque individu se reproduit de manière indépendante des autres et des générations.

Théorème 1. *Soient $(X_n^{(k)})_{\substack{k\in\mathbb{N}^*\\ n\in\mathbb{N}}}$ des variables aléatoires à support dans $\mathbb{N}$ indépendantes et identiquement distribuées de loi $X \in L^1$ d'espérance $\mathbb{E}[X] = m$.*

On pose $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{Z_n} X_n^{(k)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 \text{ si } m > 1 \text{ ou } m = 1 \text{ et } p_1 + p_0 < 1 \\ \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z_n > 0) \geq c \text{ sinon} \end{cases}$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = P(X = n)$. Soit M l'événement d'extinction.
On remarque que s'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\{Z_n = 0\}$, alors $\{Z_m = 0\}$ pour tout $m \geq n$ et que dans ce cas il y a extinction.
Ainsi, $M = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$.
On pose $x_n = P(Z_n = 0)$. On a alors que (x_n) est une suite croissante et bornée par $P(M) \leq 1$ donc, d'après le théorème de convergence monotone, converge vers une limite notée $\alpha \in [0, 1]$. Par théorème de continuité croissante, on a

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\mapsto+\infty} x_n = \alpha.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n : t \mapsto \mathbb{E}[t^{Z_n}]$, la fonction génératrice de Z_n.
Montrons que α est un point fixe de G, la fonction génératrice de X. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(t) &= \mathbb{E}[t^{Z_{n+1}}) \\ &= \mathbb{E}\left[t^{\sum_{k=1}^{Z_n} X_n^{(k)}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{N\in\mathbb{N}} t^{\sum_{k=1}^{N} X_n^{(k)}} \mathbb{1}_{\{Z_n=N\}}\right] \end{aligned}$$

Par Fubini-Tonelli,

$$= \sum_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{N} t^{X_n^{(k)}} \mathbb{1}_{\{Z_n = N\}}\right]$$

Or, d'après le lemme des coalitions les deux tribus $\sigma\left((X_{n-1}^{(i)})_{i \leq N-1}\right)$ et $\sigma\left((X_n^{(i)})_{i \leq N}\right)$ sont indépendantes.

En observant la définition de Z_n on remarque que $\mathbb{1}_{\{Z_n=N\}} \perp\!\!\!\perp \prod_{k=1}^{N} t^{X_n^{(k)}}$ et donc on a

$$\begin{aligned}
\sum_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{N} t^{X_n^{(k)}} \mathbb{1}_{\{Z_n = N\}}\right] &= \sum_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(Z_n = N\right) \prod_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[t^{X_n^{(k)}}\right) \\
&= \sum_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(Z_n = N\right) \prod_{k=1}^{N} G(t) \\
&= \sum_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(Z_n = N\right) G(t)^N \\
&= G_n \circ G(t)
\end{aligned}$$

Comme $Z_0 = 1$, on a $G_0(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc $G_0 = Id$.
Ainsi, par récurrence, on a $G_n = G \circ ... \circ G$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
G(x_n) &= G\left(P(Z_n = 0)\right) \\
&= G \circ G_n(0) \\
&= G_{n+1}(0) \\
&= \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) \\
&= x_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, comme (x_n) est à valeur dans $[0,1]$ et comme G est continue sur $[0,1]$, on a $G(\alpha) = \alpha$.

Lemme 2. *α est le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$.*

Preuve du lemme. Soit $\beta \in [0,1]$ le plus petit point fixe de G. Celui-ci existe, car $G - id$ est continue sur le compact $[0,1]$.
$\mathbb{E}[X]$ est finie, donc G est dérivable sur $[0,1]$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$G'(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k p_k t^{k-1}$$

Comme $t \in [0,1]$, chaque terme de la série est positif, on a que $G'(t) \geq 0$ et donc G est croissante sur $[0,\beta]$. On a donc,

$$G([0,\beta]) \subset [G(0), G(\beta)] \subset [0,\beta]$$

Or, $x_0 = 0$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,\beta]$.
Ainsi, $\alpha \in [0,\beta]$ et donc $\alpha = \beta$ par minimalité de β. $\square$

On cherche maintenant une CNS pour avoir $\alpha = 1$. Cela va dépendre de la valeur de $m = \mathbb{E}[X] = G'(1)$.

Lemme 3. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est strictement convexe sur $]a, b[$. Alors toute corde de f coupe cette dernière deux (et seulement deux) points.*

Preuve. Soient $c, d \in]a, b[$ et C la corde reliant $f(c)$ et $f(d)$. On a au moins deux points d'intersections que sont c et d. D'autre part, puisque f est strictement convexe, d'après l'inégalité des trois pentes elle est strictement en dessous de C et strictement au dessus des tangentes T_c et T_d de f en c et d. Ainsi, on a bien le résultat annoncé. □

— Si $m = G'(1) > 1$, alors, comme G' est continue sur $[0, 1]$, on a

$$\exists \delta > 0, \forall t \in]1 - \delta, 1], G'(t) \geq 1$$

Comme G' est continue sur $[0, 1]$, on a pour tout $t \in]1 - \delta, 1]$,

$$\int_t^1 G'(t)dt \geq \int_t^1 dt \Rightarrow G(1) - G(t) \geq 1 - t \Rightarrow G(t) \leq G(1) + t - 1 = t$$

Or $G(0) \geq 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\beta \in]0, 1[$, tel que β soit **un** point fixe de G. D'après le lemme précédent il y en a au plus deux, et c'est le plus petit par le lemme 2 d'où $P(M) = \alpha = \beta \in]0, 1[$.

— Si $m < 1$, alors G étant au dessus de ses tangentes elle est en particulier au dessus de *id*. On en déduit que 1 est le seul point fixe, et donc $\alpha = \mathbb{P}(M) = 1$.

— Si $m = 1$, alors on a deux cas :

  ⋆ Si $p_0 + p_1 = 1$, alors, comme $m = p_1 = 1$, on a $Z_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $P(M) = 0$.

  ⋆ Si $p_0 + p_1 < 1$, alors G'' est strictement positive sur $]0, 1[$ donc G est strictement convexe, et donc strictement au dessus de sa tangente en 1 (sauf en 1) ce qui montre qu'il n'y a qu'un point fixe $\alpha = 1 = \mathbb{P}(M)$.

Cela résoud le cas $p_0 + p_1 < 1$ avec $c = \alpha$ et $d = 1$. □

Références

[PNP] Walter Appel, Probabilités pour les non-probabilistes