

Théorème de stabilité de Lyapunov

Notions utilisées : Réduction sur \mathbb{C} , normes et formes bilinéaires en dimension finie, stabilité d'EDO

Motivations

C'est le cas idéal du passage du non linéaire au linéaire, qui illustre l'utilité de l'approximation linéaire (idée fondamentale du calcul différentiel).

Prérequis : Cauchy-Lipschitz local, décomposition de Chevalley-Dunford (ou une décomposition en sous-espaces caractéristiques).

Théorème 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = 0$. On suppose que $A := Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Alors 0 est un point d'équilibre du système, et il est attractif : il existe un voisinage V de 0 pour lequel $\forall x \in V$, l'unique solution du système différentiel

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases} \quad \text{tend (exponentiellement) vers 0 lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Preuve. Notations : on ordonne les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A telles que $Re(\lambda_n) \leq \dots \leq Re(\lambda_1) < 0$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée associée.

Etape 1 : Un peu d'algèbre linéaire pour montrer $\|e^{tA}\| \leq C_1 P(|t|) e^{Re(\lambda_1)t}$ + **conclusion sur le système linéarisé.**

Par Dunford (on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on a $A = N + D$. D'une part, e^{tN} est un polynôme en tA . En effet :

$$\|e^{tN}\| \leq \sum_{n=0}^{n-1} \left\| t^n \frac{N^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{n-1} |t|^n \frac{\|N\|^n}{n!} =: P(|t|).$$

Ensuite, on remarque que e^{tD} est majorée en norme $\|\cdot\|_\infty$ par $e^{Re(\lambda_1)t}$. Ainsi, par équivalence des normes, il existe C_1 telle que

$$\|e^{tA}\| \leq C_1 P(|t|) e^{Re(\lambda_1)t}.$$

Ainsi, si l'on considère l'unique solution z du système différentiel linéarisé $\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x \end{cases}$ on a d'après ce qui

précède $\|z(t)\| = \|e^{tA}x\| \leq C_1 P(|t|) e^{Re(\lambda_1)t} \|x\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. L'objectif maintenant est d'en déduire la même chose sur le système de départ.

Etape 2 : Introduction de la **fonction de Liapounov** q et angle obtus entre ∇q et la solution du système linéarisé.

On note $b(x, y) := \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle$. On montre que b est un produit scalaire, et on note q la norme associée.

L'application b est bien définie comme intégrale d'une fonction continue positive. La positivité, l'homogénéité, la bilinéarité et l'inégalité triangulaire et proviennent des propriétés de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (les intégrales sont bien convergentes par domination obtenue à l'étape 1). Enfin, le caractère défini positif provient du fait que l'intégrande $\|e^{tA}x\|^2$ est continue positive, et est donc nulle si et seulement si son intégrale sur \mathbb{R}_+ est nulle. Notons donc q la forme quadratique associée à b .

Puisque q est une forme quadratique, elle est dérivable et vérifie $q(x+h) = q(x) + 2b(x, h) + o(\|h\|^2)$ d'où $\nabla q(x) = 2b(x, \cdot)$. On en déduit en particulier

$$\nabla q(x).Ax = 2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} [t \mapsto \|e^{tA}x\|^2] dt = -\|x\|^2. \quad (1)$$

Voyons maintenant si l'on peut obtenir une égalité semblable pour le système de départ.

Etape 3 : Inéquation différentielle sur le système de départ.

Lemme 2. *Le système de départ admet une solution y définie pour tout $t \geq 0$.*

Preuve du lemme. On remarque que f est \mathcal{C}^1 , donc localement lipschitzienne. En particulier, sur tout intervalle $I_n = [0, n]$, elle est globalement lipschitzienne sur I_n donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution globale (I_n, y_n) , et par unicité de celle-ci on a de plus $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1}|_{I_n} = y_n$ (il y a "recollement" des solutions). Ainsi, on peut définir y par $y(t) := y_n(t)$ ssi $t \in I_n \setminus I_{n-1}$ (avec la convention $I_{-1} = \emptyset$). \square

On remarque alors, en posant $r(y) = f(y) - Ay$

$$\frac{d}{dt} (q(y(t))) = \nabla q(y(t)).y'(t) = \langle \nabla q(y(t)), r(y) + A(y) \rangle = -\|y(t)\|^2 + 2b(y(t), r(y(t))).$$

D'une part, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la norme $\|\cdot\|_q = \sqrt{q(\cdot)}$. On obtient

$$|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)} \times \sqrt{q(r(y))}.$$

D'autre part, $r(y) = f(y) - f(0) - Df(0).y$, par définition de la différentielle de f (pour la norme $\|\cdot\|_q$), $r(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ où les convergences sont au sens de $\|\cdot\|_q$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ on a un $\alpha > 0$ tel que $q(y) \leq \alpha$ entraîne $\sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon \sqrt{q(y)}$. On en déduit $2b(y, r(y)) \leq 2\varepsilon q(y)$. Par équivalence des normes, il existe $C_2 > 0$ telle que $C_2 q(y) \leq \|y\|^2$ d'où

$$\forall y, q(y) \leq \alpha \implies \frac{d}{dt} (q(y(t))) \leq -\beta q(y(t))$$

avec $\beta = C - 2\varepsilon$ et $\varepsilon < C_2/2$.

Etape 4 : Résolution de l'inéquation et conclusion.

Tout d'abord, on remarque que pour $x \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}(0, \alpha)$, l'inéquation précédente est vérifiée pour tout $t \geq 0$. En effet, s'il existait un premier instant $t_0 > 0$ tel que $q(y(t)) = \alpha$ alors on aurait $\frac{d}{dt} (q(y(t_0))) \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$ par continuité. Donc puisque q est \mathcal{C}^1 , on aurait un $t_1 < t_0$ tel que $q(y(t)) > \alpha$, ce qui contredirait la minimalité de t_0 .

De plus, cette inéquation différentielle entraîne que $(e^{\beta t} q(y))' = e^{\beta t} (q(y))' + \beta q(y) \leq 0$ d'où $e^{\beta t} q(y)$ décroissante, et en particulier

$$\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(y(0)) = e^{-\beta t} q(x).$$

Enfin, par équivalence des normes, on en déduit que pour tout x dans une boule autour de 0, la solution y du système initial décroît exponentiellement vers 0. \square

Remarque 3. *Cela traduit bien le fait que, dans certaines conditions, étudier un problème sous une approximation linéaire permet d'en déduire des choses sur le système lui-même. Ici le lien entre le système et son linéarisé est flagrant, et on a même un équilibre asymptotiquement stable.*

Références

[Rou] François Rouvière, Petit guide de calcul différentiel