Lemme de Morse

Référence : [Rou] exercice 114 p344 + exercice 66 p201

Notions utilisées : Algèbre bilinéaire et formes quadratiques (+signature / Sylvester), Calcul différentiel et Taylor à l'ordre 2

Motivations

Affiner l'étude locale d'une fonction $\mathcal{C}^3$, et permet de faire le lien entre coniques et formes quadratiques. Le résultat énonce que localement en un point critique non dégénéré, f ressemble à "la" forme quadratique de signature celle de la Hessienne de f.

Théorème 1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ et que f a un point critique non dégénéré en 0, i.e $D_0 f = 0$ et $H_0 f$ est une forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.*

Alors il existe deux voisinages V_1, V_2 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : x \in V_1 \to \varphi(x) = (\varphi_n(x), \dots, \varphi_n(x)) \in V_2$ tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in V_1, f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i^2(x) - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i^2(x)$$

Preuve. **Etape 1 : Etude de la matrice symétrique issue du Taylor à l'ordre 2.**

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à f. Il vient

$$f(x) = f(0) + 0 + \int_0^1 (1-t) D_{tx}^2 f(x,x) dt = f(0) + {}^t x \left(\int_0^1 (1-t)\, H_{tx} f \right) x\, dt = f(0) + {}^t x Q(x) x$$

avec $Q(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\, H_{tx} f\, dt$.

Lemme 2. *Pour toute matrice $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible, l'application $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M A_0 M$ a sa différentielle en 0 surjective. De plus, il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(V, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ difféomorphe telle que $\forall A \in V,\ A = {}^t\psi^{-1}(A) A_0 \psi^{-1}(A) = \phi(\psi^{-1}(A))$.*

Preuve du lemme. **Etape 1.a : Noyau et image de ϕ.**

On a $\phi(M+H) = \phi(M) + {}^t M A_0 H + {}^t H A_0 M + {}^t H A_0 H$, donc $D_{I_n}\phi.H = A_0 H + {}^t H A_0$. En particulier pour toute matrice symétrique S on a $D_{I_n}\phi.\left(\frac{1}{2}A_0^{-1}S\right) = {}^t\left(\frac{1}{2}A_0^{-1}S\right)A_0 + A_0\left(\frac{1}{2}A_0^{-1}S\right) = S$ d'où la surjectivité. De plus, $H \in \mathrm{Ker}(\phi) \iff {}^tHA_0 = -A_0H \iff {}^t(A_0H) = -A_0H \iff A_0H$ est antisymétrique.

Etape 1.b : TIL sur ϕ.

On remarque alors que l'ensemble $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_0H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\phi)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère alors $\psi = \phi_{|F}$. D'après ce qui précède, $\mathrm{Ker}(D_{I_n}\psi) = \mathrm{Ker}(D_{I_n}\psi) \cap F$ est réduit à 0 donc $D_{I_n}\psi$ est bijective. Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de I_n dans F tel que ψ soit un difféomorphisme sur $\psi(U)$. Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un voisinage ouvert de I_n, quitte à remplacer U par $U \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on peut supposer $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $V := \psi(U)$ est un voisinage ouvert de $\psi(I_n) = A_0$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et donc quelle que soit $A \in V$ on a bien une unique matrice $M = \psi^{-1}(A)$ telle que $\psi(M) = {}^tMA_0M = A$, c'est à dire $A = {}^t\psi^{-1}(A)A_0\psi^{-1}(A)$. $\square$

Etape 2 : Application du lemme.

On applique ce lemme à la forme quadratique Q. Cette forme est non dégénérée donc de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, et envoie donc un voisinage V_1 de 0 sur un voisinage V de $Q(0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En pré-composant par Q l'application ψ donnée par le lemme, en en déduit qu'il existe une application M, $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage V_1 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x \in V_1, Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x).$$

Donc $\forall x \in V_1,\ f(x) - f(0) = {}^tx{}^tM(x)Q(0)M(x)x = {}^t\theta(x)Q(0)\theta(x)$ en posant $\theta : x \mapsto M(x)x$. Or $Q(0) = \frac{1}{2}H_0f$ est de signature $(p, n-p)$, donc d'après le théorème de Sylvester, il existe une base dans laquelle $Q(0)$ est de la bonne forme, c'est à dire $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $PQ(0){}^tP = \begin{pmatrix} (I_p) & (0) \\ (0) & (-I_{n-p}) \end{pmatrix}$.

Etape 3 : Conclusion.

On en déduit le résultat par composition des deux applications suivantes

- L'application $x \mapsto M(x)x$ est différentiable de différentielle $M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$, donc localement difféomorphe.
- Le changement linéaire de variables (changement de base) étant linéaire, il est globalement différomorphe.

d'où un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : V_1 \to \varphi(V_1)$ tel que $\forall x \in V_1$, ${}^txQ(x)x = \sum_{i=1}^{p}\varphi_i^2(x) - \sum_{i=p+1}^{n}\varphi_i^2(x)$ $\square$

Références

[Rou] Rouvière François, Petit guide de calcul différentiel