Optimisation d'une fonction convexe dans un Hilbert

Notions utilisées : Parties convexes, optimisation (extrema de fonctions), densité, espaces séparables (facultatif...), projection sur un convexe fermé.

Motivations

Motivations : De manière générale : optimisation = problèmes de physique / industrie / etc "de base" : minimiser un coût, une surface, etc... Ici : résultat théorique d'existence dans le cadre convexe + Hilbert.

Cadre : On se place dans un $\mathbb{R}-$espace de Hilbert H.

Théorème 1. *Soit C un convexe non vide fermé de H et $J : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe et coercive sur C. Alors J admet un minimum sur C.*

Lemme 2 (Banach-Alaoglu)**.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de H. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement, c'est à dire qu'il existe $x \in H$ telle que*

$$\forall y \in H, \langle x_n, y\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle.$$

Preuve du lemme. **Etape 1 :** On prouve le lemme dans le cas où H est séparable.
Etape 1.a : Extraction diagonale.
On se donne une partie $D = \{z_k, k \in \mathbb{N}\}$ dénombrable dense dans H. On note également $M > 0$ un réel positif bornant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On va réaliser une extraction diagonale en appliquant successivement le critère de Bolzano-Weiserstrass dans $\mathbb{R}$.
On a , pour $k = 0$, $|\langle x_n, z_0\rangle| \leq M \|z_0\|$ donc bornée dans $\mathbb{R}$. Par critère de Bolzano-Weiserstrass il existe une extractrice φ_0 telle que $\langle x_{\varphi_0(n)}, z_0\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Supposons construites les φ_j, $j \leq k$, telles que $\langle x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j(n)}, z_j\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce pour un certain $k \in \mathbb{N}$ fixé. On a $\left|\langle x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}, z_{k+1}\rangle\right| \leq M \|z_{k+1}\|$ donc comme précédemment, il existe une extractrice φ_{k+1} telle que $\langle x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_{k+1}(n)}, z_{k+1}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Ainsi, en posant $\varphi : n \mapsto (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)$ on obtient que $\langle x_{\varphi(n)}, z_k\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Etape 1.b : Critère de Cauchy et densité.
Montrons que pour tout $y \in H$ la suite $\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est complet, cela conclura.
Soit $y \in H$. Soit $\varepsilon > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$, $\|z_k - y\| \leq \dfrac{\varepsilon}{4M}$, ce qui est légitime par densité de D dans H. De plus, d'après ce qui précède appliqué en $k = k_0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left|\langle x_{\varphi(n+p)} - x_{\varphi(n)}, z_{k_0}\rangle\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On a alors, par inégalité triangulaire puis de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\left|\langle x_{\varphi(n+p)} - x_{\varphi(n)}, y\rangle\right| &\leq \left|\langle x_{\varphi(n+p)} - x_{\varphi(n)}, z_{k_0}\rangle\right| + \left|\langle x_{\varphi(n+p)} - x_{\varphi(n)}, y - z_{k_0}\rangle\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\|x_{\varphi(n+p)}\right\| - x_{\varphi(n)} \|y - z_{k_0}\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \times \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet donc converge. Finalement, on a bien montré que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait faiblement dans H.

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\phi : y \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle$ est bien définie (φ a été définie indépendamment de y) et linéaire continue par passage à la limite. Ainsi, par le théorème de représentation de Riesz, on obtient bien le $x \in H$ demandé.[1]

Etape 2 : Cas H non séparable : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sutie bornée dans H.
On pose $H_0 := \overline{Vect\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}$ qui est bien un espace de Hilbert (comme fermé d'un espace de Hilbert) séparable. On écrit alors $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$ ce qui est légitime car H_0 est fermé. D'après l'étape 1, toute suite bornée de H_0 converge faiblement, notons $x \in H_0$ sa limite au sens faible.
Soit maintenant $y \in H$ élément quelconque de H. On note $y = y_0 + y_1 \in H_0 \oplus H_0^{\perp}$. On a

$$\langle x_n, y\rangle = \langle x_n, y_0\rangle + \langle x_n, y_1\rangle = \langle x_n, y_0\rangle + 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, y_0\rangle$$

d'où le résultat dans le cas général. □

Preuve du théorème. **Etape 1 :** Appliquer le lemme à une suite minimisante de J.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour J (obtenue par caractérisation de la borne inf), c'est à dire telle que $J(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\limits_C J$.
On remarque tout d'abord que

— Ou bien C est borné auquel cas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi
— Ou bien C n'est pas borné auquel cas, par coercivité de J, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tout de même bornée. En effet si ce n'était pas le cas, on aurait $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et alors par définition de suite minimisante $\inf\limits_C J = +\infty$ ce qui est impossible ici car C est non vide et J est bien définie sur C.

Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée donc C étant un espace de Hilbert (car fermé), on en déduit qu'il existe $x \in C$ tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x. Cette limite faible x est notre candidat pour réaliser le minimum de J sur C.
Etape 2 : Appliquer le théorème de projection sur des convexes fermés non vides bien choisis. On considère maintenant les ensembles $C_a := \{y \in C, J(y) \leq a\}$ pour $a > \inf\limits_C J$. L'ensemble C_a est non vide par caractérisation de l'infimum. Il est fermé comme image réciproque du fermé $]-\infty, a]$ par l'application continue J. C_a est convexe car C et J sont convexes : si $J(y_i) \leq a$ alors par convexité de C l'élément $ty_1 + (1-t)y_2$ est dans C, et aussi dans C_a et par convexité de J.
D'après le théorème de projection sur C_a,[2] il existe un unique projecteur p_a qui vérifie $\forall y \in C_a$, $\langle x - p_a(x), y - p_a(x)\rangle \leq 0$. On aimerait beaucoup remplacer y par x mais on ne sait pas encore que $x \in C_a$. On sait en revanche que $x_{\varphi(n)}$ est dans C_a pour n assez grand. Pour $a > \inf\limits_C(J)$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $x_{\varphi(n)} \in C_a$. Pour ces valeurs de n, on a

$$\langle x - p_a(x), x_{\varphi(n)} - p_a(x)\rangle \leq 0.$$

En particulier, par convergence faible, on peut faire tendre n vers $+\infty$ <u>**à a fixé**</u> dans la relation précédente, ce qui donne

$$\|x - p_a(x)\|^2 \leq 0$$

soit $x = p_a(x) \in C_a$. Ceci étant vrai pour tout $a > \inf\limits_C J$. On en déduit que $x = \inf\limits_C J$. □

1. c'est un des endroits de la preuve où l'on voit apparaître l'utilité de la complétude de H.
2. Encore un petit coup de complétude ! Et cette fois-ci, c'est sur H et non $\mathbb{R}$.

Références

[Alr] Allaire Grégoire, Analyse numérique et optimisation

[Cia] Ciarlet P.G, Introduction à l'analyse numérique matricielle et optimisation