Polynômes orthogonaux

Notions utilisées : Holomorphie, Fourier L^1, méthodes classiques d'intégration (IPP, changement de variables).

Motivations

On peut voir ce résultat comme un résultat théorique qui donne une machine à construire (explicitement) des bases hilbertiennes sur les Hilbert séparables classiques L^2. Derrière ce théorème se cachent les polynômes orthogonaux associés aux poids "classiques" : polynômes de Tchebychev ($\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, Laguerre ($\rho(x) = x^a e^{-x}$), Legendre ($\rho \equiv 1$), Hermite ($\rho(x) = e^{-x^2}$)... Avec ce théorème, on peut approcher des fonctions L^2 et c'est pour cela qu'il y a un intérêt pratique, par exemple pour le calcul approché d'intégrales. C.f aussi les polynômes de meilleure approximation pour un poids donné. Autre remarque : si f a une singularité, on peut "l'absorber" dans le poids.

Cadre : On se place dans $L^2(I,\rho)$ (pour la mesure de Lebesgue) avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et ρ une fonction poids :

Définition 1. *On appelle fonction poids toute fonction mesurable $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty \tag{1}$$

On munit cet espace du produit scalaire L^2 pour la mesure à densité $\rho(x)dx$. On considère la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ, c'est à dire l'unique famille obtenue en orthogonalisant via le procédé de Gram-Schmidt la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 2. *On suppose que ρ est une fonction poids vérifiant*

$$\exists a > 0, \int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < +\infty$$

Alors la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Preuve. Idée générale : On va en fait montrer que la famille $\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne, en montrant que l'orthogonal est réduit à 0. On se sert ensuite de la propriété $\mathrm{vect}((X^n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathrm{vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})$ donnée par Gram-Schmidt pour conclure.
Etape 1 : Montrer que si $f \in L^2$ alors sa transformée de Fourier se prolonge en une fonction holomorphe sur une bande bien choisie.
Attention f n'est pas L^1 mais juste L^2 à priori, donc on ne peut pas directement utiliser la définition

intégrale de la transformée de Fourier. Par contre on peut dominer intelligemment avec une inégalité de convexité :

$$|f(x)|\rho(x) \leq \frac{1+f(x)^2}{2}\rho(x).$$

Pour le théorème d'holomorphie sous l'intégrale sur $\mathcal{B}_a := \{z, Im(z) \in [-a/2, a/2]$, on peut majorer brutalement par $f(x)e^{|x|a/2}$, puis utiliser Cauchy-Schwarz pour conclure à l'intégrabilité de $\rho(x)f(x) \times e^{|x|a/2}$.

Etape 2 : On montre que vect$((P_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est dense en utilisant le critère de densité via l'orthogonalité dans les espaces de Hilbert. Pour cela, on calcule les dérivées n-ièmes de la transformée de Fourier en 0 :

$$\partial_\xi \hat{f}(0) = (-i)^n \langle f, X^n \rangle.$$

Un argument alliant théorème des zéros isoles, injectivité de la transformée de Fourier (L^2) et stricte positivité de ρ permet de conclure. (C'est également a ce moment la qu'il faut invoquer Gram-Schmidt pour faire le lien avec la famille des polynômes orthogonaux). $\square$

Remarque 3 (Bonus)**.** *On peut trouver un contre-exemple qui montre que la condition 1 est bien nécessaire. On peut considérer pour cela la fonction poids $\rho(x) := x^{-ln(x)}$ et la fonction $f(x) := sin(2\pi x) \in L^2$. On montre que ρ est bien un poids, mais que la fonction f bien que nulle contre tout polynôme n'est pas identiquement nulle dans L^2.*

Références

[BMP] V.Beck, J.Malick, G.Peyré, *Objectif agrégation*