Prolongement de la fonction ζ de Riemann à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Notions utilisées : Techniques d'intégration à plusieurs paramètres, séries de fonctions (en particulier intégration de ces dernières), holomorphie,

Motivations

Donner un prolongement de ζ en dehors du domaine $\{Re > 1\}$ où elle est définie naturellement comme série absolument convergente. On fait au passage appel à la fonction gamma d'Euler et à ses propriétés (lien possible avec le développement en produits infinis, etc).

Prérequis : Formule sommatoire de Poisson (voir annexe), transformée de Fourier $\sqrt{\pi}e^{\xi^2/4}$ de la gaussienne.

La convention ici choisie pour la transformée Fourier est

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx.$$

Notations : Pour $Re(s) > 1$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta : \left(s \in \{Re > 1\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)$$

ainsi que

$$f_t : x \mapsto e^{-\pi x^2 t}$$

pour t un paramètre réel strictement positif, et

$$\theta : \left(t > 0 \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_t(n)\right)$$

Théorème 1. *ζ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ a un pôle simple en 1. De plus, tout zéro de ζ appartient à $-2\mathbb{N} \cup \{0 < Re < 1\}$.*

Preuve. **Etape 1 :** Appliquer la **formule sommatoire de Poisson** sur f_t pour trouver $\forall t > 0$, $\theta(t) = \frac{1}{t}\theta(1/t)$.

Soit $t > 0$.

On a bien $f_t \in L^1 \cap \mathcal{C}0$ et $f_t(n) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$ par croissances comparées. Ainsi, la formule sommatoire de Poisson s'applique, et on a

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_t(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_t(n).$$

Il s'agit donc de calculer la transformée de Fourier de la gaussienne f_t. Appliquons le théorème de dérivation (par rapport à la variable fréquentielle ξ) sous l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi x^2 t} dx$. On considère la domination

$\left|-2i\pi x e^{-2i\pi x\xi}e^{-\pi x^2 t}\right| = 2\pi|x|e^{-\pi x^2 t} \in L^1(\mathbb{R})$; il vient alors par intégration par parties, le terme de bord étant nul par croissances comparées,

$$\begin{aligned}
\hat{f_t}'(\xi) &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi x^2 t} dx \\
&= 0 - 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi\xi e^{-2i\pi x\xi} \times \frac{1}{-2\pi t} e^{-\pi x^2 t} dx \\
&= -\frac{2i\pi\xi}{t} \hat{f_t}'(\xi)
\end{aligned}$$

d'où $\hat{f}_t$ solution de l'EDO $y' + \dfrac{2i\pi x}{t} y = 0$. On en déduit ainsi $\hat{f}_t(\xi) = \hat{f}_t(0) e^{\frac{i\pi\xi^2}{t}}$.
Enfin, $\hat{f}_t(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u^2 \frac{du}{\sqrt{\pi t}}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ d'où $\hat{f}_t(n) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} f(1/t)(n)$ et finalement $\theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\theta(1/t)$.

Etape 2 : On pose $\xi(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Montrer que $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \omega(t) t^{s/2-1} dt$ où $\omega(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

Se fait bien par Fubini puis changement simple de variables.

Etape 3 : Montrer que $\xi(s) = 1 + s(s-1) \displaystyle\int_1^{+\infty} \omega(t) \left(t^{s/2-1} - t^{(1-s)/2-1}\right) dt$.

On a $\theta(t) = 2\omega(t) + 1$. On en déduit que $\omega(1/t) = \sqrt{t}\omega(t) + \sqrt{t} - 1/2$. L'idée est alors de séparer l'intégrale et de faire un changement de variables $1/t$ pour tout ramener sur $[1, +\infty[$. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^{+\infty} \omega(t) t^{s/2-1} dt \\
&= \int_0^1 \omega(t) t^{s/2-1} dt + \int_1^{+\infty} \omega(t) t^{s/2-1} dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{u}\omega(u) + \sqrt{u} - 1/2\right) u^{-s/2+1} \frac{du}{u^2} + \int_1^{+\infty} \omega(t) t^{s/2-1} dt \\
&= \int_1^{+\infty} \omega(t) \left(t^{-s/2-1}\sqrt{t} + t^{s/2-1}\right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}(\sqrt{t} - 1) t^{-s/2-1} dt \\
&= \int_1^{+\infty} \omega(t) \left(t^{(1-s)/2} + t^{s/2-1}\right) dt + \frac{1}{s(s-1)}
\end{aligned}$$

D'où $\xi(s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \times s(s-1) = 1 + s(s-1) \displaystyle\int_1^{+\infty} \omega(t) \left(t^{s/2-1} - t^{(1-s)/2-1}\right) dt$.

Etape 4 : Utiliser le fait que Γ ne s'annule pas pour conclure sur les zéros et le pôle de ζ. On remarque (non trivialement) que par l'étape précédente, ξ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$. Cela se montre par théorème d'holomorphie pour l'intégrale sur tout domaine $\{|Re(s) \leq A\}$, $A > 0$. La domination de l'intégrande se fait en deux étapes : il y a un besoin crucial d'une majoration un peu fine de ω sans quoi on se retrouvera avec un $t^{(A-1)/2}$ sur les bras. On remarque tout d'abord que pour $t \geq 1$ on a

$1 - e^{-\pi t} \geq 1 - e^{-1} \geq \frac{1}{2}$, d'où

$$0 \leq \omega(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n t} = \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \leq 2e^{-\pi t}.$$

D'autre part, pour $|Re(s)| \leq A$,

$$\left| t^{s/2-1} - t^{-s/2-1/2} \right| \leq |t|^{A/2-1} + |t|^{-A/2-1/2} \leq 2|t|^{\frac{A-1}{2}}$$

Ainsi, en combinant les deux majorations précédentes, on obtient un majorant $4e^{-\pi t}|t|^{\frac{A-1}{2}}$ indépendant de s et intégrable sur $[1, +\infty[$. $\square$

Annexe 1 - Formule sommatoire de Poisson

Lemme 2. *Soit $f \in \mathcal{C}0 \cap L^1$ telle qu'il existe $M > 0, \alpha > 1$ tels que $\forall x$, $|f(x)| \leq \frac{M}{1 + |x|^\alpha}$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ converge absolument, et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$*

Preuve. **Etape 1 : Calculer les coefficients de Fourier** de la fonction $S : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$.

Etape 2 : Ecrire l'égalité $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(S) e_n(x)$ et évaluer en 0. $\square$

Annexe 2 - Applications

Dans [ZuQu] page 490 : $\zeta(s) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$

Références

[ZuQu] Zuily, Quéffelec Analyse pour l'agrégation, Quatrième édition