Méthode QR

Notions utilisées : Décomposition QR, décomposition LU, compacité et suites extraites,

Motivations

La méthode QR est une méthode assez générale (c.f hypothèses) qui permet de trouver les valeurs propres d'une matrice donnée.

1 Prérequis

Théorème 1 (Factorisation QR)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $Q, R \in U_n(\mathbb{C}) \times T_n^s(\mathbb{C})$, $A = QR$. Si de plus A est inversible, alors la décomposition est unique pour peu que l'on impose $r_{i,i} \in \mathbb{R}_+^*$.*

Remarque 2. *Si $A = QR = Q'R'$ alors Q et Q' (parallèlement R et R') diffèrent d'une matrice D de coefficients de module 1 : $Q'^*Q = R'R^{-1} = D$.*

Théorème 3 (Factorisation LU)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec tous ses mineurs $\Delta_k = det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}\right)$ non nuls. Alors il existe $L, U \in T_n^i(\mathbb{C}) \times T_n^s(\mathbb{C})$ telles que $A = LU$ et $l_{i,i} = 1$.*

2 Méthode QR

Théorème 4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A possède n valeurs propres de module distincts : $|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n|$. On suppose aussi qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$. On suppose enfin que P^{-1} possède une factorisation LU. Alors l'algorithme*

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} := R_k Q_k \text{ où } A_k = Q_k R_k \end{cases}$$

fournit des matrices A_k telles que $\lim(A_k)_{i,i} = \lambda_i$ et $\lim(A_k)_{i,j} = 0$ pour $i > j$ (sous la diagonale).

Preuve. **Etape 1 : Heuristique.**

On a $A_{k+1} = \mathcal{Q}_k^* A_k \mathcal{Q}_k$ où $\mathcal{Q}_k = Q_1 \dots Q_n$. On veut la limite de $\mathcal{Q}_k$, donc il paraît logique d'étudier A^k.

En effet, $A^k = \mathcal{Q}_k\mathcal{R}_k$ où $\mathcal{R}_k = R_k \dots R_1$ [1] dépend aussi de $\mathcal{Q}_k$ et $\mathcal{R}_k$.
On écrira alors $P^{-1} = LU$ pour exprimer d'une autre façon les $\mathcal{Q}_k$, pour pouvoir trouver leur limite.
Etape 2 : (re-)Construction de la factorisation QR de A^k.

But : Trouver une autre décomposition QR de A^k pour la comparer avec $\mathcal{Q}_k\mathcal{R}_k$ et "identifier" les décompositions à matrice diagonale près.

Soit $P^{-1} = LU$ et $P = QR$. On a A inversible, donc il est légitime d'inverser D : $A^k = PD^kP^{-1} = QR(D^kLD^{-k})D^kU$. L'intérêt est que l'on connaît bien (D^kLD^{-k}) : c'est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et des $(D^kLD^{-k})_{i,j} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k$ sous la diagonale (multiplication à gauche/droite par une matrice diagonale).
Donc $(D^kLD^{-k}) \to I_n$ en $k \to \infty$. On se sert ici de l'hypothèse sur les modules des λ_i.
On pose alors $F_k := (D^kLD^{-k}) - I_n$ qui tend vers 0 en $k \to \infty$. En multipliant par R et R^{-1} il vient

$$R(D^kLD^{-k}) = (I + RF_kR^{-1})R.$$

On a de plus $(I + RF_kR^{-1})$ inversible à partir d'un certain rang (série de Neumann, $||RF_kR^{-1}|| \to 0$) et donc on a unicité de la factorisation QR :

$$I + RF_kR^{-1} = \tilde{Q}_k\tilde{R}_k$$

avec $(\tilde{R}_k)_{i,i} > 0$.
Maintenant, il va s'agir de montrer que les suites $(\tilde{Q}_k)$ et $(\tilde{R}_k)$ convergent. On va montrer que $(\tilde{Q}_k)$ est bornée et n'admet qu'une valeur d'adhérence. Tout d'abord, elle est bornée car chaque $\tilde{Q}_k$ est unitaire. Elle admet donc une valeur d'adhérence par Bolzano-Weierstrass. Soit une suite extraite, avec une extractrice φ, qui converge vers cette valeur d'adhérence $\tilde{Q}$. On a

$$\tilde{R}_{\varphi(k)} = (\tilde{Q}_{\varphi(k)})^*(I + RF_{\varphi(k)}R^{-1})$$

donc $\tilde{R}_{\varphi(k)} \to \tilde{R} \in T_n^s(\mathbb{C})$ telle que $(\tilde{R})_{i,i} \geq 0$. En passant à la limite, il vient $I_n = \tilde{Q}\tilde{R}$ et donc $\tilde{Q} = \tilde{R} = I_n$ par unicité de la décomposition pour les matrices inversibles. Ainsi, ceci valant pour toute valeur d'adhé-

1. On remarque que $Q_0^*A_0Q_0 = R_0Q_0 = A_1$, et ainsi de suite pour les autres étapes.

rence et suite extraite, on en conclut la convergence de $\tilde{Q}_k$ et $\tilde{R}_k$ vers I_n.

Etape 3 : Conclusion.

On a obtenu $A^k = (Q\tilde{Q}_k)(\tilde{R}_k R D^k U) = \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k)$. Or $Q\tilde{Q}_k$ est unitaire et $\tilde{R}_k R D^k U$ est triangulaire supérieure donc il existe D_k diagonale avec $|d_i^k| = 1$ telle que $\mathcal{Q}_k = Q\tilde{Q}_k D_k$. On a alors $A_{k+1} = \mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k$ avec $A = QRDR^{-1}Q^{-1}$ d'où

$$A_{k+1} = D_k^* \tilde{Q}_k^* R D R^{-1} \tilde{Q}_k D_k.$$

Or $\tilde{Q}_k \to I_n$ donc $\mathcal{R}_k := \tilde{Q}_k^* R D R^{-1} \tilde{Q}_k$ tend vers RDR^{-1} qui est triangulaire supérieure avec les λ_i sur la diagonale.

On a finalement $(A_{k+1})_{i,j} = \overline{d_i^k} d_i^k (\mathcal{R}_k)_{i,j}$ et $(A_{k+1})_{i,i} = (\mathcal{R}_k)_{i,i} \to \lambda_i$ ce qui conclut. □

Références

[1]