Théorème de Riesz-Fischer

Notions utilisées : Suites de Cauchy, théorie de la mesure (ensembles négligeables etc).

Motivations

Donner une preuve de la complétude des espaces de Lebesgue, mais aussi étudier le lien sous-jacent entre convergence presque sûre et convergence L^p.

Prérequis : voir lemme 2.

Théorème 1. *Soit* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Alors pour tout* $p \in [1, +\infty]$, $(L^p_\mu(E), \|\cdot\|_p)$ *est complet.*

Avant de démontrer le théorème, montrons le lemme suivant

Lemme 2. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Alors toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérance converge dans* (X, d).

Preuve du lemme. Considérons une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Quitte à considérer le maximum des rangs donnés par les deux définitions, il existe un rang n_0, une valeur d'adhérence $x \in X$ et une extractrice φ tels que :

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0, \forall m \in \mathbb{N}, d(x_{n+m}, x_n) \leq \varepsilon/2 \\ \forall n \geq n_0, d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \varepsilon/2 \end{cases}$$

En particulier, on a un rang n_0 tel que, en prenant le cas particulier $m = \varphi(n) - n \in \mathbb{N}$ dans la première inégalité,

$$\forall n \geq n_0, d(x_{\varphi(n)}, x_n) \leq \varepsilon/2.$$

Enfin, par inégalité triangulaire et symétrie de la distance d, il vient

$$\forall n \geq n_0, d(x_n, x) \leq d(x_{x_n,\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \varepsilon$$

ce qui conclut. $\square$

Preuve du théorème. **Etape 1 : Cas $1 \leq p < +\infty$.**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans L^p. Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_k, \forall m \in \mathbb{N}, \|f_{n+m} - f_n\| \leq \frac{1}{2^k} \tag{1}$$

Pour alléger les notations on pose $g_k := f_{N_k}$. On considère alors la suite de fonctions définie par $\varphi_n := \sum_{k=0}^{n-1} |g_{k+1} - g_k|$. Par inégalité triangulaire puis par (1) il vient

$$\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

Ainsi on a

$$\|\varphi_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Ainsi, la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, et croissante (somme partielle d'une série à termes positifs). Par le théorème de la limite monotone, elle converge simplement (presque partout) dans L^p. Notons $\varphi \in L^p$ sa limite.[1] On a de plus, pour $m \geq n \geq 1$, et pour $\mu-$ presque tout x :

$$|g_{n+m}(x) - g_n(x)| \leq |g_{n+m}(x) - g_{n+m-1}(x)| + \cdots + |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \varphi_{n+m}(x) - \varphi_n(x) \leq \varphi(x) - \varphi_n(x).$$

En particulier puisque $\varphi(x) - \varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on en déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est de Cauchy dans L^p. Puisque L^p est un espace métrique, toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge. On en déduit finalement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p, ce qui conclut.

Etape 2 : Cas $p = +\infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans L^∞.
L'idée est de prendre un nombre dénombrable d'epsilons. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang N_k tel que

$$\forall n \geq N_k, \forall m \in \mathbb{N}, \|f_{n+m} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

Par définition du sup essentiel, il existe un négligeable $A_k \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall x \in E \setminus A_k, |f_{n+m}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Considérons le mesurable $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$. A est mesurable et négligeable par réunion dénombrable de mesurables négligeables. De plus, pour tout $x \in E \setminus A$ on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, x \in E \setminus A_k \text{ donc } \forall n \geq N_k, \forall m \in \mathbb{N}, |f_{n+m}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Autrement dit, la suite de nombre réels $f_n(x)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$ qui est complet, donc elle est convergente. Notons $f(x)$ sa limite. f est définie sur $E \setminus A$ donc $\mu-$presque partout, et de plus en faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente il vient

$$\forall x \in E \setminus A, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N_k, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

En particulier par inégalité triangulaire et en écrivant $f = f - f_{N_k} + f_{N_k}$ il vient $f \in L^\infty$. Enfin, l'inégalité précédente valant pour $\mu-$presque tout x, on en déduit $\|f - f_{N_k}\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et possède une valeur d'adhérence f, donc converge cette dernière. □

Remarque 3. *On a au passage montré que la convergence L^p impliquait la convergence presque-partout à sous-suite près.*

1. On aimerait utiliser l'argument ACV => CV pour les séries, mais on doit le redémontrer ici (cela équvaut à montrer la complétude) ! C'est pourquoi on passe plutôt par le critère "Cauchy + suite extraite".