Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ et densité de $(sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

Notions utilisées : Considérations sur les inf et sup, densité, valeurs d'adhérence.

Motivations

Permet de donner un exemple de suite dense à partir d'un résultat d'algèbre sur les groupes. Cela laisse entrevoir l'étude des systèmes dynamiques et des orbites denses. Par exemple, on peut s'intéresser aux résonances pour deux oscillateurs harmoniques couplés comme par exemple un pendule double. Si le rapport des pulsations n'est pas rationnel, alors un théorème qui s'appuie largement sur la densité de $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ (états propres quantifiés de l'oscillateur harmonique d'où le n) permet de se prononcer sur la densité de la trajectoire du pendule double (il "remplit" tous les points qui sont à sa portée !). [a]

---

a. Remarque rajoutée en 2022, un an après mon passage à l'agrégation, suite à un cours de M2 de B.Grébert sur les phénomènes de résonance.

Théorème 1. *Les sous-groupes de* $(\mathbb{R}, +)$ *sont soit de la forme* $a\mathbb{Z}$ *soit des parties denses dans* $\mathbb{R}$.

Preuve. **Etape 1 : Cas où $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$. (cas discret)**

On montre d'abord que $a \in G$. Procédons par l'absurde : on suppose que $a \notin G$.

Par caractérisation de inf avec $\varepsilon = a > 0$ on a un $x \in G$ tel que $a < x < 2a$. En particulier $0 < x - a < a$ donc en ré-appliquant la même caractérisation avec $\varepsilon = x - a$ on obtient un $y \in G$ tel que $a < y < a + \varepsilon = x$. On a d'une part, en utilisant $-y < -a$,

$$x - y < x - a < a$$

et d'autre part en utilisant $-y > -x$ on a

$$x - y > x - (-x) = 2x > 0.$$

Puisque x et y sont dans G on en déduit que $x - y$ est dans $G \cap \mathbb{R}_+^*$ d'une part, et strictement plus petit que a d'autre part, ce qui contredit l'hypothèse $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. Ainsi $a \in G$. Par additivité, on en déduit $a\mathbb{Z} \subset G$.

Ensuite, on constate que si $x \in G$, en prenant $n = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$ on a

$$n \leq \frac{x}{a} < n + 1$$

d'où

$$0 \leq x - na < a.$$

En particulier $x - na$ est un élément de $G \cap \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$ strictement plus petit que a donc il est nul. On en déduit $x \in a\mathbb{Z}$ et donc $a\mathbb{Z} \supset G$.

Etape 2 : Cas où $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$. (cas dense)

Là encore, on se sert de la caractérisation de la borne inférieure et du fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien pour approcher tout réel.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de a il existe $x' \in G$ tel que $0 < x' < \varepsilon$. On pose $n = \left\lfloor \frac{y}{x'} \right\rfloor$, on a $0 \neq y - nx' < x' < \varepsilon$ d'où $|y - x| \leq \varepsilon$ avec $x := nx' \in G$ car G groupe additif. G est donc dense dans $\mathbb{R}$. □

Théorème 2. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$, l'ensemble $\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans S^1. En particulier, l'ensemble $\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.*

Preuve. **Etape 1 : Montrer $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ssi $G = \langle a, b\rangle = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est monogène.**

On remarque tout d'abord que si $a = 0$ alors $G = b\mathbb{Z}$ est bien monogène. On suppose dans toute la suite a et b non nuls.

D'une part, si $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$ est monogène alors il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $a = kc$ et $b = lc$, d'où $\frac{a}{b} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$.

D'autre part si $\frac{a}{b} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ avec k et l premiers entre eux, alors

$$G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{bk}{l}\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\left(\frac{k}{l}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\right) = \frac{b}{l}\left(k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}\right) = \frac{b}{l}\mathbb{Z}$$

car k et l premiers entre eux. Donc G est bien monogène.

Etape 2 : montrer que si $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Z} + \mathbb{N}\beta$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\beta$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Donc il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $-\varepsilon \leq n + m\beta - y \leq \varepsilon$. Si $m \in \mathbb{N}$, on a bien le résultat. Sinon, on a d'après l'inégalité précédente $+\varepsilon \geq -n - m\beta + y \geq -\varepsilon$. Mais alors $n' := -n \in \mathbb{Z}$ et $-m \in \mathbb{N}$ donc l'élément $x := n' - m\beta \in \mathbb{Z} + \mathbb{N}\beta$ approche bien y : $|x - y| \leq \varepsilon$.

Etape 3 : Prouver le théorème.

On pose $\beta := \frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $z = e^{i\alpha}$ un élément de S^1. D'après ce qui précède, $\mathbb{Z} + \mathbb{N}\beta$ est dense dans $\mathbb{R}$ et donc il existe une suite $(k_n + \beta l_n)$ d'éléments de $\mathbb{Z} + \mathbb{N}\beta$ convergeant vers α. Par continuité de $t \mapsto e^{it}$ on en déduit que

$$e^{2i\pi k_n + \theta l_n} = e^{\theta l_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{i\alpha} = z.$$

On en déduit la densité.[1]

Finalement, en remarquant que tout $x \in [-1, 1]$ s'écrit comme $\mathrm{Im}(e^{i\theta})$ on en déduit d'après ce qui précède et par continuité de Im qu'il existe une suite extraite $\sin(l_n)$ de $(sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. $\square$

Remarque 3. *Le premier théorème permet aussi de montrer que tout sous-groupe de S^1 est soit fini soit dense dans S^1.*

Références

[XENSAn1] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 1

1. On peut aussi dire que c'est l'image d'un dense par une application continue (c'est le même argument).