Table de caractères de $\mathcal{S}_4$

Notions utilisées :

Motivations

Compréhension du groupe $\mathcal{S}_4$ via les représentations.

Théorème 1. *La table de caractère de $\mathcal{S}_4$ est*

	id	*(1 2)*	*(1 2)(3 4)*	*(1 2 3)*	*(1 2 3 4)*
χ_{triv}	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
ε	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
χ_H	*3*	*1*	*-1*	*0*	*-1*
$\varepsilon\chi_H$	*3*	*-1*	*-1*	*0*	*1*
χ_2	*2*	*0*	*2*	*-1*	*0*

Preuve. On commence par remplir les deux premières lignes. La première est la représentation triviale, et la seconde a représentation $\varepsilon : \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)id_{\mathbb{C}}$ qui se déduit de la signature. La première colonne se déduit de la formule de Burnside "numéro deux", celle qui affirme $|G| = \sum_{W \in Irr(G)} (dim(W))^2$. Pour les trois dernières, on se réfère au lemme suivant qui constitue le noeud de la preuve : $\square$

Lemme 2. *Soit G un groupe agissant de manière $2-$transitive sur un ensemble X de cardinal fini n. Soit V un $\mathbb{C}-$ev de dimension x. On note $(e_x)_{x\in X}$ une base de V. Alors la représentation définie par*

$$\rho : g \in G \mapsto e_{g\cdot x}$$

définit une représentation linéaire de G décomposable en $V = H \oplus D$ avec H hyperplan de $\mathbb{C}^n$ et D droite. De plus, cette décomposition est une décomposition en représentations irréductibles.

Preuve du lemme. **Etape 1 : Théorème de Maschke** pour découper V.

On pose $D := vect\left(\sum_{x\in X} e_x\right)$. Cette droite est $G-$stable, donc d'après le théorème de Mashcke, il existe H un supplémentaire $G-$stable : $V = H \oplus D$.

On a D irréductible car de dimension 1. De plus $\chi_V = \chi_H + \chi_D$ par additivité des caractères, et $\chi_D = \chi_{triv}$

est le caractère trivial[1]. Montrons que H est irréductible en montrant $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1$.

Etape 2 : Calcul du produit scalaire à l'aide **des points fixes de l'action** de G sur X.

Par définition, pour un élément $g \in G$, $\chi_V(g) = Tr(\rho(g))$. En particulier, puisque la représentation est ici une représentation par permutation, $\rho(g)$ est une matrice de permutation ! La valeur du caractère est donc le nombre de points fixes de cette "permutation" g. Autrement dit :

$$\chi_V(g) = |Fix(g)| = |\{x \in X ; g \cdot x = x\}|.$$

Or $\chi_V(g) = \chi_D(g) + \chi_H(g) = 1 + \chi_H(g)$. Ainsi,

$$\langle \chi_H, \chi_H \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (|Fix(g)| - 1)^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|^2 - 2 \times \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1.$$

Pour calculer ceci, on rappelle la formule de Burnside :

$$\text{nombre d'orbites} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$

En particulier pour le second terme, l'action étant transitive (car $2-$transitive), on n'a qu'une seule orbite donc le second terme est -2. Pour le premier, on considère l'action $G \curvearrowright X \times X$ donnée par l'action précédente. Les points fixes pour un $g \in G$ pour cette deuxième action, $\widetilde{Fix}(g)$, vérifie

$$\widetilde{Fix}(g) = \{(x,y) \in X^2, g \cdot (x,y) = (x,y)\} = \{(x,y) \in X^2, g \cdot x = x \text{ et } g \cdot y = y\} = Fix(g) \times Fix(g).$$

Ainsi, par la formule de Burnside, puisqu'il n'y a que deux orbites, $\{(x,x), x \in X\}$ et $\{(x,y) \in X^2, x \neq y\}$, on a $2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|^2$. Finalement, on a bien $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1$. □

Preuve de la table, suite. On remarque que $\mathcal{S}_4 \curvearrowright [\![1,4]\!]$ est $4-$transitive donc en particulier $2-$transitive. Le lemme précédent s'applique donc à $V = \mathbb{C}^4$, et on a ici $D = vect((1,1,1,1))$ et $H = D^\perp$. Pour calculer la valeur du caractère irréductible χ_H, il faut en choisir une base e_1, e_2, e_3 et regarder l'effet des permutations de chaque classe choisie sur les coordonnées de ces vecteurs. On obtient la troisième ligne du tableau.

Pour la quatrième ligne, on considère le "produit" de la signature et de la représentation précédente. C'est la représentation donnée par le caractère $\chi = \varepsilon \times \chi_H$. Elle est bien irréductible : $\langle \varepsilon\chi_H, \varepsilon\chi_H \rangle =$

1. Se vérifie en regardant l'effet d'un élément de g sur la somme $\sum_{x \in X} e_x$.

$$\frac{1}{\mathcal{S}_4}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_4}|\varepsilon(\sigma)|^2|\chi_H(\sigma)|^2 = 1 \text{ car } |\varepsilon(\sigma)|^2 = 1.$$

Pour la dernière, on utilise le fait que les vecteurs colonnes d'une table de caractères forme une famille orthogonale pour le produit scalaire hermitien standard (ici de $\mathbb{C}^{|Conj(\mathcal{S}_4)|} = \mathbb{C}^5$). $\square$

Références

[NH2G22] Caldero P., Germoni J., Nouvelles histoires hédoniques de groupes et géométrie tome second, p308-309