Colles 2021-2022 S1 - Suites et séries

1 Questions de cours

Question de cours 1 (Comparaison série-intégrale)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ décroissante et $u_n = f(n)$. Alors $\sum u_n$ converge ssi $\displaystyle\int_0^\infty f$ converge.
Question subsidiaire : que dire dans le cas f croissante ?

Question de cours 2 (Règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive et non nulle à partir d'un certain rang. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to l$. Alors :
- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement

Question subsidiaire : trouver deux exemples de nature différente dans le cas $l = 1$.

Question de cours 3 (Critère de Riemann)

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Question de cours 4 (Critère des séries alternées)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite alternée telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0. Alors :
- $\sum u_n$ converge
- La somme S est comprise entre deux termes consécutifs de la somme partielle S_n.
- $|R_n| \leq |u_{n+1}|$
- S est du signe de u_0.

2 Exercices

Exercice 1

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 2

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
2. (a) On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge mais que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ diverge.

   (b) Montrer que $u_n \sim v_n$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3 (Dunod MPSI - 14.15)

Soit $\alpha > 1$. Déterminer, en fonction de α, la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

En déduire un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 4 (Dunod MPSI - 14.2 + bonus)

Convergence et sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n}$
2. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$
3. $\sum_{n\geq 2} (3+(-1)^n)^{-n}$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, on pourra utiliser $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$

Exercice 5

Nature de $\sum_{n\geq 1} \ln(n)$ et équivalent de la somme partielle.

Exercice 6 (Dunod MPSI - 14.6)

Nature de $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 (OdlT 2017 - 77 (ESPCI))

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante. Montrer que $\sum u_n$ converge ssi : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge.
Question subsidiaire : suffit-il d'avoir $u_n = o(1/n)$? (c.f exo suivant)

Exercice 8 (Séries de Bertrand)

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a(\ln(n))^b}$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Discuter de la nature de cette série suivant les paramètres a et b.

Application : donner une série à termes positifs $\sum u_n$ qui diverge mais qui vérifie $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (le critère de Bertrand est un raffinement du critère de Riemann).

Exercice 9 (Suites récurrentes et séries)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $x_{n+1} = \sin(x_n)$.

1. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite. Indication : commencer par montrer qu'elle est décroissante.
2. Montrer que $\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et en déduire un équivalent de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ a-t-on convergence de la série $\sum x_n^a$?