

Colles 2021-2022 S10 - Espaces vectoriels normés

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer que $\|\cdot\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|)$ est une norme.

Question de cours 2

Montrer qu'une boule d'un EVN est convexe.

2 Exercices

Exercice 1

Montrer que l'application $N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto N(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 3

Soit $E := \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ définit une norme sur E . Est-ce que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur E ? Si oui est-elle équivalente à la norme précédente?

Exercice 4

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On appelle suite de Cauchy dans E une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, \|u_{n+p} - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.

1. On admet que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.
2. Soit $f : E \rightarrow E$ une fonction contractante. Soit $u_0 \in E$ et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $f(u_n) = u_{n+1}$.
 - (a) Montrer que $\|u_{n+1} - u_n\| \leq a^n \|u_1 - u_0\|$.
 - (b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$.
 - (c) Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 5

On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\|\cdot\|_1 : A \in E \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$ définit une norme sur E .
2. Montrer que c'est une norme d'algèbre : $\forall A, B \in E, \|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$
3. (a) Montrer que $\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$. Indication : En considérant un indice j_0 réalisant

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

- (b) Montrer que l'inégalité précédente est en fait une égalité. Indication : on pourra, pour le cas d'égalité, prendre $x = e_{j_0}$.

Exercice 6 (Norme et matrices symétriques positives)

On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit M une matrice symétrique à valeurs propres positives. Montrer que $\text{Tr}(M) = 0$ entraîne $M = 0$.
2. On admet que $\forall A \in E, {}^tAA$ est symétrique à valeurs propres positives. En déduire que l'application $A \in E \mapsto \text{Tr}({}^tAA)$ définit une norme sur E .
3. Montrer que cette norme est invariante par multiplication par une matrice orthogonale.