

Colles 2021-2022 S10 - Espaces vectoriels normés

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer que $\|\cdot\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|)$ est une norme.

Question de cours 2

Montrer qu'une boule d'un EVN est convexe.

2 Exercices

Exercice 1

Montrer que l'application $N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto N(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

Solution

On considère $f_n : x \mapsto x^n$ qui vérifie $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$

Exercice 3

Soit $E := \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ définit une norme sur E . Est-ce que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur E ? Si oui est-elle équivalente à la norme précédente?

Solution

Non. Contre-exemple : $x \mapsto x^n$ a une norme infinie de 1 mais la norme infinie de sa dérivée est n .

Exercice 4

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On appelle suite de Cauchy dans E une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, \|u_{n+p} - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.

1. On admet que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.
2. Soit $f : E \rightarrow E$ une fonction contractante. Soit $u_0 \in E$ et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $f(u_n) = u_{n+1}$.
 - (a) Montrer que $\|u_{n+1} - u_n\| \leq a^n \|u_1 - u_0\|$.
 - (b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$.
 - (c) Montrer que f admet un unique point fixe.

Solution

1. On procède composantes par composantes!
2. (a) On note $a \in (0, 1)$ une constante de contraction de f et on a $\|u_{n+1} - u_n\| \leq a \|u_n - u_{n-1}\|$. On en déduit par récurrence que $\|u_{n+1} - u_n\| \leq a^n \|u_1 - u_0\|$.
 - (b) On en déduit par inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \|u_{n+p} - u_n\| &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \|u_{n+p-k} - u_{n+p-k-1}\| \leq \sum_{k=0}^{p-1} a^{n+p-k-1} \|u_1 - u_0\| \\ &\leq a^n \frac{a^p - 1}{a - 1} \|u_1 - u_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

car $|a| < 1$ et $a \neq 1$.

- (c) On a montré que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$ et donc converge car $(E, \|\cdot\|)$ est complet. Donc en notant u la limite de cette suite on a en passant à la limite dans la relation $f(u_n) = u_{n+1}$ on obtient $f(u) = u$ car f est continue car contractante. On a donc trouvé un point fixe. De plus si u et v sont des points fixes tels que $u \neq v$ alors $\|u - v\| \leq a \|u - v\| < \|u - v\|$ ce qui est absurde. Donc on a unicité du point fixe.

Exercice 5

On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\|\cdot\|_1 : A \in E \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$ définit une norme sur E .
2. Montrer que c'est une norme d'algèbre : $\forall A, B \in E, \|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$
3. (a) Montrer que $\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$. Indication : En considérant un indice j_0 réalisant

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

- (b) Montrer que l'inégalité précédente est en fait une égalité. Indication : on pourra, pour le cas d'égalité, prendre $x = e_{j_0}$.

Solution

1. On justifie l'existence via la lipschitzianité de A . Pour l'inégalité triangulaire, on utilise cette même propriété.
2. On voit que $\|ABx\|_1 \leq \|A\| \|Bx\|_1 \leq \|A\| \|B\| \|x\|_1$ d'où $\|AB\|_1 \leq \|A\| \|B\|$.
3. On considère un tel indice j_0 . On a

$$\begin{aligned}
 \|Ax\|_1 &= \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij} x_j| \\
 &= \sum_i |x_j| \sum_j |a_{ij}| \\
 &\leq \sum_i |x_j| \sum_j |a_{ij_0}| \\
 &= \|x\|_1 \sum_j |a_{ij_0}|
 \end{aligned}$$

d'où $\|A\| \leq \sum_j |a_{ij_0}|$. Cette somme est exactement $\|Ax\|_1$ pour $x = e_{j_0}$.

Exercice 6 (Norme et matrices symétriques positives)

On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit M une matrice symétrique à valeurs propres positives. Montrer que $\text{Tr}(M) = 0$ entraîne $M = 0$.
2. On admet que $\forall A \in E$, tAA est symétrique à valeurs propres positives. En déduire que l'application $A \in E \mapsto \text{Tr}({}^tAA)$ définit une norme sur E .
3. Montrer que cette norme est invariante par multiplication par une matrice orthogonale.

Solution

1. Point embêtant pour la norme :

$$\|A + B\| = \text{Tr}({}^t(A + B)(A + B)) = \text{Tr}({}^tAA) + \text{Tr}({}^tBA) + \text{Tr}({}^tAB) + \text{Tr}({}^tBB)$$