Colles 2021-2022 S11 - Séries entières

1 Questions de cours

Question de cours 1

Enoncer et démontrer le lemme d'Abel.

Question de cours 2

Enoncer le plus précisément possible les modes de convergence d'une série entière (convergence ponctuelle (absolue ou non), uniforme, normale, divergence, divergence grossière...

Question de cours 3

Montrer qu'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

2 Exercices

Exercice 1

Trouver le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de terme général : (indication pour toutes : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(n)a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$)

1. $a_n = \sum_{d|n} d^2$
2. $a_n = \left|\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, x^2+y^2 \leq n\}\right|$
3. $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$ en encadrant par convexité sin.

Exercice 2

Soit $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R au rayon de convergence de :

1. $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\sum_n a_n^2 z^n$
3. $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$
4. $\sum_n a_n z^{n^2}$

Exercice 3

1. Montrer qu'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ qui vérifie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 a un rayon de convergence $R \leq 1$.
2. Trouver le RCV de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $a_n = 1$ si n est premier et 0 sinon.

Exercice 4

Déterminer le RCV et la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Exercice 5

On pose $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Calculer f' et en déduire une expression de f
2. Décomposer $\frac{1}{n(n-1)}$ en éléments simples et retrouver l'expression précédente.

Exercice 6

1. Montrer que arcsin est DSE et que $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}$ sur $]-1,1[$.
2. Montrer que $g : t \mapsto \arcsin t^2$ est DSE.
3. En dérivant g, trouver une expression de g en DSE.

Exercice 7

1. Montrer que $g : t \mapsto \arctan t^2$ est DSE.
2. En dérivant g, trouver une expression de g en DSE.