Colles 2021-2022 S11 - Séries entières

1 Questions de cours

Question de cours 1

Enoncer et démontrer le lemme d'Abel.

Solution

Ce qu'il faut écrire :

1. $|a_n z_0^n| \leq M$
2. $|a_n z^n| \leq M \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$ qui est le terme général d'une série CV.

Question de cours 2

Enoncer le plus précisément possible les modes de convergence d'une série entière (convergence ponctuelle (absolue ou non), uniforme, normale, divergence, divergence grossière...

Solution

1. Convergence normale dans tout disque fermé du disque ouvert de convergence.
2. Convergence absolue en tout point du disque ouvert de convergence.
3. Divergence grossière sur le complémentaire de l'adhérence du disque de convergence.
4. Sur la sphère de rayon R : on ne peut pas se prononcer.

Question de cours 3

Montrer qu'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

Solution

Il convient d'adopter le point de vue "série de fonctions" en posant $f_n : x \mapsto a_n x^n$ et S_n la somme partielle. On peut invoquer la convergence normale sur tout compact, qui donne que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ tend vers 0 comme terme reste partiel d'une série convergente, et donc que $\|S_n - S\|_\infty \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On peut aussi invoquer la convergence uniforme de la suite de fonctions $(S_n)_n$ pour retrouver le résultat. Cela consiste à écrire les epsilons pour les deux informations dont on dispose : S_n est continue comme polynôme et $(S_n)_n$ converge uniformément vers la somme S.

2 Exercices

Exercice 1

Trouver le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de terme général : (indication pour toutes : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(n)a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$)

1. $a_n = \sum_{d|n} d^2$
2. $a_n = \left|\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2, x^2+y^2 \leq n\}\right|$
3. $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$ en encadrant par convexité sin.

Solution

1. On a $n \leq a_n \leq n^3$ donc $R = 1$.
2. On constate que cet ensemble est l'intersection du cercle de $\mathbb{R}^2$ de rayon n avec $\mathbb{Z}^2$. En particulier on peut l'encadrer entre le carré de rayon n et le carré de rayon $\sqrt{n}$ (faire un dessin). On constate donc que $\sqrt{n} \leq a_n \leq n$ et donc que $R = 1$.
3. On encadre *sin* par convexité et on intègre la relation $\left(\frac{2}{\pi}t\right)^n \leq \sin(t)^n \leq 1^n = 1$ obtenue. On trouve

   $$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi}t\right)^n dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$$

   c'est à dire

   $$\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$$

   En particulier $(I_n)_n$ est bornée donc de rayon de convergence $R \geq 1$, et par comparaison par un O avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} z^n$ qui est de RCV 1 on trouve $R \leq 1$ d'où $R = 1$.

Exercice 2

Soit $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R au rayon de convergence de :

1. $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\sum_n a_n^2 z^n$
3. $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$
4. $\sum_n a_n z^{n^2}$

Solution

1. Par dérivation de séries entières, le RCV R_1 est égal à R. (il faut encadrer α entre deux entiers)
2. Le RCV R_2 est R^2 car $|a_n^2 z^n|$ est bornée ssi $|a_n z^{n/2}|$ l'est.
3. On montre que $R_3 = R$ par majoration et minoration. On a $|a_n| \leq \left|a_n e^{\sqrt{n}}\right|$ d'où $R_3 \leq R$. D'autre part, si $|a_n z^n|$ est bornée, alors en posant $r = |z|$ on a, pour tout $\rho < r$:
$$a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n = a_n e^{\sqrt{n}} \frac{\rho}{r}^n r^n$$
qui est bornée car $e^{\sqrt{n}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \to 0$ (écrire sous forme exponentielle pour voir cela). Donc $R_3 = R$.
4. On procède par encadrement là encore. On sépare le cas $R \in \mathbb{R}_+^*$ des cas $R = 0$ et $R = +\infty$. Dans les deux derniers cas, on peut trouver des exemples qui montrent que R_4 peut prendre des valeurs différentes. Exemples : $a_n = \dfrac{1}{\lambda^{n^2}}$, $\lambda > 1$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ et $a_n = \dfrac{1}{(n!)^2}$ où $R_4 = \lambda, 1, +\infty$ respectivement.
Pour le cas $R \in \mathbb{R}_+^*$:
— Si $r > R$ alors $|a_n z^n|$ est non bornée, et pour tout $\rho > 1$, $a_n \rho^{n^2}$ n'est pas bornée non plus car égale à $a_n r^n \dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ et $\dfrac{\rho^{n^2}}{r^n} \to +\infty$. Donc $\rho > R_4$
— Si $r < R$ alors $|a_n z^n|$ est bornée, et pour tout $\rho < 1$ par la même écriture que précédemment on trouve une suite bornée. Donc $\rho < R_4$.
On en conclut que $R_4 = 1$. Pour $R = 0$ on a tout $R_4 \in [0, 1]$ possible et si $R = +\infty$ on a tout $R_4 \in [1, +\infty]$ possible.

Exercice 3

1. Montrer qu'une série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ qui vérifie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 a un rayon de convergence $R \leq 1$.
2. Trouver le RCV de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $a_n = 1$ si n est premier et 0 sinon.

Exercice 4

Déterminer le RCV et la somme des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Solution

1. Rayon 1, somme $\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$ (en sortant un x^3 on trouve la dérivée de $\dfrac{-1}{1+t}$
2. Rayon 1, somme calculée avec une DES. On trouve $\dfrac{-1}{2}\ln(1-x)-\dfrac{1}{2x^2}\left(-\ln(1-x)-x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ car $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}$.
3. Rayon de 1 car $n^{(-1)^n}=O(n)$ d'où $R\geq 1$ d'une part, et d'autre part $R\leq 1$ car $n^{(-1)^n}1^n$ n'est pas bornée. Pour la somme, on sépare les termes pairs et impairs (aussi de RCV 1 !). La somme des termes pairs vaut $\dfrac{2x^2}{1-x^2)^2}$ et celle des termes impairs $\dfrac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$.
4. On a $H_n\sim\ln(n)$ d'où un RCV de 1 par comparaison par équivalent. (sinon, on peut faire d'Alembert). L'idée pour calculer la somme est de remarquer que c'est un produit de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}x^n$.

   On trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}H_nx^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x)}$

Exercice 5

On pose $f(x):=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.

1. Calculer f' et en déduire une expression de f
2. Décomposer $\dfrac{1}{n(n-1)}$ en éléments simples et retrouver l'expression précédente.

Solution

1. On a $f'(x)=\ln(1+x)$ et on trouve $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$.
2. On retrouve l'expression précédente avec $\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{(n-1)}-\dfrac{1}{n}$.

Exercice 6

1. Montrer que arcsin est DSE et que $\arcsin(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ sur $]-1,1[$.
2. Montrer que $g:t\mapsto\arcsin t^2$ est DSE.
3. En dérivant g, trouver une expression de g en DSE.

Solution

1. $$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{2n-1}{2}\frac{t^{2n}}{n!}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{2^nn!}\frac{t^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}t^{2n}.$$
   Par intégration, arcsin est DSE sur $]-1,1[$ et $\arcsin(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$
2. Par produit de Cauchy, $\arcsin^2$ est DSE sur $]-1,1[$.
3. On a $g'(t)=$

Exercice 7

1. Montrer que $g : t \mapsto \arctan t^2$ est DSE.
2. En dérivant g, trouver une expression de g en DSE.

Solution

1. Produit de Cauchy.
2. $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n S_n}{n-1} x^{2n+2}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{0}^{n} \frac{1}{2k+1}$. On a $1 \leq S_n \leq n+1$ d'où un RCV de 1.