Colles 2021-2022 S12 - Familles sommables

Théorème 1 (Sommation par paquets)

$(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ est sommable ssi

1. $\forall p \in \mathbb{N}$, $(a_{p,q})_{q\in\mathbb{N}}$ est un terme général de série absolument convergente.
2. La série de terme général $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ est absolument convergente.

Le cas échéant, $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$

1 Questions de cours

Question de cours 1 (**)

Montrer que $[0,1] \subset \mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Question de cours 2

Montrer qu'un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Question de cours 3

Montrer qu'une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensemble au plus dénombrables est au plus dénombrable.

2 Exercices

Exercice 1

Soit E un ensemble non vide. On veut montrer que $E \not\simeq \mathcal{P}(E)$. On suppose par l'absurde que $E \simeq \mathcal{P}(E)$ et on se donne une bijection $\varphi : E \to \mathcal{P}(E)$. Trouver une contradiction en considérant $A := \{x \in E, x \notin \varphi(x)\}$.

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 3

Soient $a, b > 0$. Montrer que $(e^{-ap-bq}_{b,q\in\mathbb{N}})$ est sommable. Calculer sa somme.

Exercice 4

On prend comme suite J_n croissante de parties finies de $\mathbb{N}^2$ les parties $J_n := \{(p,q) \in \mathbb{N}^2, p \leq n, q \leq n\}$ puis majorer (séries géométriques). On peut aussi appliquer la sommation par paquets sur $I_n := \{(n,q) \in \mathbb{N}^2, q \in [\![1,n]\!]\}$. On trouve

$$S = \frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-b})}.$$

Exercice 5

On pose, pour $x > 1$, $\zeta(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. En cherchant un équivalent de $\displaystyle\sum_{q=p+1}^{+\infty} \frac{1}{q^\alpha}$, trouver les valeurs de α pour lesquelles $\left(\dfrac{1}{(p+q+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Le cas échéant, calculer la somme en fonction de ζ.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ de module < 2. Montrer que la famille $\left(\dfrac{z}{p}\right)^n_{p\geq 2, n\geq 2}$ est sommable.
3. Montrer que la série de terme général $\zeta(n) - 1$ est convergente, et calculer sa somme en utilisant la première question. On pourra utiliser sans démonstration le développement limité de la série harmonique.

Exercice 6

Soient $a, b > 0$. A quelle condition $(a^p b^q)_{p,q\in\mathbb{N}}$ est-elle sommable ? Dans les cas de sommabilité, calculer la somme.

Exercice 7

$\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p\geq 2, q\geq 2}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer la somme.

Exercice 8

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$