Colles 2021-2022 S13 - Probabilités

1 Questions de cours

I désigne un ensemble au plus dénombrable.

Question de cours 1

Enoncé et démonstration du théorème de continuité monotone.

Question de cours 2

Enoncé et démonstration de la formule des probabilités totales.

Question de cours 3

Enoncé et démonstration de la formule des probabilités composées.

2 Exercices

Exercice 1

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements indépendants.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k})$
2. On suppose que $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$ ssi $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
3. On suppose $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{(n+2)^2}$. Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ et en déduire la probabilité qu'un seul des A_n se réalise.

Exercice 2

On souhaite montrer qu'il n'existe pas de proba $\mathbb{P}$ sur la tribu $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{n}$ où A_n est l'ensemble des multiples de n. On raisonne par l'absurde.

1. Montrer que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants où $\mathcal{P} = \{p_i, i \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des nombres premiers.
2. Soit $A = \bigcap_{r\geq 1} \bigcup_{i\geq r} A_{p_i} = \limsup_i A_i$. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. En déduire une contradiction. Indication : montrer que $n \in A \iff n$ a une infinité de diviseurs premiers.

Exercice 3

1. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) := \dfrac{1}{n(n+1)}$ définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer la probabilité que n soit pair. Indication / Astuce : il faut forcer l'apparition de la série harmonique.

Exercice 4 (Borell-Cantelli 1)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\limsup\limits_{n} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 0} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$ est de probabilité nulle.

Exercice 5 (Borell-Cantelli 2)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\limsup\limits_{n} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 0} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$ est de probabilité 1.
Application : On lance une pièce truquée ($0 < p < 1$ d'avoir pile) une infinité de fois. Montrer que l'événement "il apparaît une infinité de fois pile, et ce m fois à la suite" est presque sûr pour tout m.

Exercice 6

Soient $n \geq 2$ et pour $p \in [\![0, n]\!]$, A_p l'événement "n est divisible par p". (C'est l'ensemble des multiples de p). On considère la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$. Qu'obtient-on si p divise n ?
2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont **les** diviseurs premiers distincts de n alors les A_{p_i} sont mutuellement indépendants.
3. Montrer que $\dfrac{\phi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$