Colles 2021-2022 S13 - Probabilités

1 Questions de cours

I désigne un ensemble au plus dénombrable.

Question de cours 1

Énoncé et démonstration du théorème de continuité monotone.

Solution

Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'événements. La réunion est aussi un événement, et la suite numérique $(\mathbb{P}(A_n))_n$ est croissante et majorée par 1 donc converge. Ensuite, on montre que la limite est bien $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right)$.

On considère pour cela la suite d'événements définie par

$$\begin{cases} B_0 &= A_0 \\ B_{n+1} &= A_{n+1} \setminus A_n \end{cases}$$

Les événements sont disjoints, et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^N B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(B_n)$ et idem pour $N = +\infty$ par propriété de sommation pour la probabilité $\mathbb{P}$. On a par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^N B_n\right) = \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_N)$$

En passant à la limite, on a bien $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Question de cours 2

Énoncé et démonstration de la formule des probabilités totales.

Solution

Soient $A \in \mathcal{F}$ et $(B_i)_i \in \mathcal{F}$ un système complet d'événements. On se place sur la tribu trace $\mathcal{F}_A = \{E \cap A, E \in \mathcal{F}\}$. C'est bien une tribu car elle contient $\emptyset$, est stable par passage au complémentaire (car $E^c \cap A^c$ est bien un événement) et par réunion disjointe. En effet si $(E_j \cap A)_j$ sont des événements de $\mathcal{F}_A$ disjoints deux à deux alors leur réunion est $\left(\bigcup_i E_i\right) \cap A$ qui est bien un événement car $\mathcal{F}$ est une tribu. De plus on vérifie facilement que la famille d'événements $(A \cap B_i)_i$ est un système complet d'événements sur cette tribu. Or pour tout i , $\mathbb{P}(A \cap B_i) = \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$ d'où

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Question de cours 3

Enoncé et démonstration de la formule des probabilités composées.

Solution

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des événements. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $B_n = A_1 \cap \dots \cap A_n$, $\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B)$. Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \neq 1$, $\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \dots \mathbb{P}(A_n|B_{n-1})$

2 Exercices

Exercice 1

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'événements indépendants.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_k})$
2. On suppose que $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$ ssi $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
3. On suppose $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{(n+2)^2}$. Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ et en déduire la probabilité qu'un seul des A_n se réalise.

Solution

1. On a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \prod_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n})$ par théorème de continuité décroissante, d'où le résultat.
2. Sens direct. Par la question précédente on a $\prod_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 0$ et donc la série diverge grossièrement. Réciproquement, on remarque que

$$\ln\left(\prod_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n})\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n))$$

Si $\mathbb{P}(A_n)$ ne tend pas vers 0 alors $\mathbb{P}(\overline{A_n})$ ne tend pas vers 1 et le produit ne tend donc pas vers 1. Si $\mathbb{P}(A_n)$ tend vers 0 alors un DL à l'ordre 1 donne $\ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) \sim -\mathbb{P}(A_n)$ (à terme constants) d'où le résultat.

3. On a

Exercice 2

On souhaite montrer qu'il n'existe pas de proba $\mathbb{P}$ sur la tribu $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ où A_n est l'ensemble des multiples de n . On raisonne par l'absurde.

1. Montrer que la famille $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants où $\mathcal{P} = \{p_i, i \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des nombres premiers.
2. Soit $A = \bigcap_{r \geq 1} \bigcup_{i \geq r} A_{p_i} = \limsup A_i$. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. En déduire une contradiction. Indication : montrer que $n \in A \iff n$ a une infinité de diviseurs premiers.

Exercice 3

1. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) := \frac{1}{n(n+1)}$ définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer la probabilité que n soit pair. Indication / Astuce : il faut forcer l'apparition de la série harmonique.

Solution

1. Somme télescopique
2. $1 - \ln(2)$

Exercice 4 (Borell-Cantelli 1)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendants. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$ est de probabilité nulle.

Solution

On a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) =$ reste partiel d'une série convergente. Par théorème de continuité décroissante sur les $\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)_n$, $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 5 (Borell-Cantelli 2)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendants. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$ est de probabilité 1.

Application : On lance une pièce truquée ($0 < p < 1$ d'avoir pile) une infinité de fois. Montrer que l'événement "il apparaît une infinité de fois pile, et ce m fois à la suite" est presque sûr pour tout m .

Exercice 6

Soient $n \geq 2$ et pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_p l'événement " n est divisible par p ". (C'est l'ensemble des multiples de p). On considère la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$. Qu'obtient-on si p divise n ?
2. Montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont les diviseurs premiers distincts de n alors les A_{p_i} sont mutuellement indépendants.
3. Montrer que $\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Solution

1. $\mathbb{P}(A_n) = \frac{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{n}$.
2. Provient du fait qu'être divisible par $p_1, \dots, p_r$ est équivalent à être divisible par le produit et donc que $A_{\prod_{i=1}^r p_i} = \bigcap_{i=1}^r A_{p_i}$. On calcule ensuite $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r A_{p_i}\right)$ grâce à cela.
3. Provient de $\varphi(n) = \# \left(\bigcap_{i=1}^r \overline{A_{p_i}} \right)$ où les p_i sont tous les facteurs premiers de n .