# Colles 2021-2022 S14 - Probabilités 2

## 1 Questions de cours

$I$ désigne un ensemble au plus dénombrable.

**Question de cours 1**

Enoncé et démonstration du théorème de continuité monotone.

**Solution**

Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'événements. La réunion est aussi un événement, et la suite numérique $(\mathbb{P}(A_n))_n$ est croissante et majorée par 1 donc converge. Ensuite, on montre que la limite est bien $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right)$. On considère pour cela la suite d'événements définie par

$$\begin{cases} B_0 & = A_0 \\ B_{n+1} & = A_{n+1} \setminus A_n \end{cases}$$

Les événements sont disjoints, et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{N} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(B_n)$ et idem pour $N = +\infty$ par propriété de sommation pour la probabilité $\mathbb{P}$. On a par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{N} B_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_N)$$

En passant à la limite, on a bien $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

**Question de cours 2**

Enoncé et démonstration de la formule des probabilités totales.

**Solution**

Soient $A \in \mathcal{F}$ et $(B_i)_i \in \mathcal{F}$ un système complet d'événements. On se place sur la tribu trace $\mathcal{F}_A = \{E \cap A, E \in \mathcal{F}\}$. C'est bien une tribu car elle contient $\emptyset$, est stable par passage au complémentaire ($car E^c \cap A^c$ est bien un événement) et par réunion disjointe. En effet si $(E_j \cap A)_j$ sont des événements de $\mathcal{F}_A$ disjoints deux à deux alors leur réunion est $\left(\bigcup_i E_i\right) \cap A$ qui est bien un événement car $\mathcal{F}$ est une tribu. De plus on vérifie facilement que la famille d'événements $(A \cap B_i)_i$ est un système complet d'événements sur cette trbu. Or pour tout $i$, $\mathbb{P}(A \cap B_i) = \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$ d'où

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

**Question de cours 3**

Enoncé et démonstration de la formule des probabilités composées.

**Solution**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des événements. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $B_n = A_1 \cap \dots \cap A_n$, $\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B)$. Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \neq 1$, $\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|B_{n-1})$

**Question de cours 4 (Markov)**

Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

**Solution**

Soit $X$ une variable aléatoire **positive** et $a > 0$. Montrons que

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

On remarque pour cela que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq a}] + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<a}] \geq \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq a}] \geq a\mathbb{P}(X \geq a)$.

**Question de cours 5 (LfGN)**

Enoncer et démontrer la loi faible des grands nombres

**Solution**

Convergence en proba vers la moyenne. On montre avec l'IBT en remarquant que $m = \mathbb{E}(S_n/n)$.

## 2 Exercices

**Exercice 1**

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements indépendants.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k})$
2. On suppose que $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$ ssi $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
3. On suppose $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{(n+2)^2}$. Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ et en déduire la probabilité qu'un seul des $A_n$ se réalise.

# Tableau récapitulatif des lois usuelles

| Nom | $X(\Omega)$ | $\mathbb{P}(X=k)=\dots$ | Espérance | Variance | Fonction génératrice $t\to\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Uniforme $X\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ | $\llbracket 1,n\rrbracket$ | $\forall k\in\llbracket 1,n\rrbracket, \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ | $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k=\frac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$ pour $t\neq 1$ |
| Bernoulli $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$ | $\{0,1\}$ | $\mathbb{P}(X=0)=1-p$ <br> $\mathbb{P}(X=1)=p$ | $p$ | $p(1-p)$ | $1-p+pt$ |
| Binomiale $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ | $\llbracket 0,n\rrbracket$ | $\forall k\in\llbracket 0,n\rrbracket, \mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | $np$ | $np(1-p)$ | $(1-p+pt)^n$ |
| Géométrique $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$ | $\mathbb{N}^*$ | $\forall k\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | $\frac{pt}{1-(1-p)t}$ |
| Poisson $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$ | $\mathbb{N}$ | $\forall k\in\mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $e^{\lambda(t-1)}$ |

**Solution**

1. On a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=\prod_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\overline{A_n})$ par théorème de continuité décroissante, d'où le résultat.
2. Sens direct. Par la question précédente on a $\prod_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\overline{A_n})=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\overline{A_n})=0$ et donc la série diverge grossièrement. Réciproquement, on remarque que
$$\ln\left(\prod_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\overline{A_n})\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1-\mathbb{P}(A_n))$$
Si $\mathbb{P}(A_n)$ ne tend pas vers 0 alors $\mathbb{P}(\overline{A_n})$ ne tend pas vers 1 et le produit ne tend donc pas vers 1. Si $\mathbb{P}(A_n)$ tend vers 0 alors un DL à l'ordre 1 donne $\ln(1-\mathbb{P}(A_n))\sim\mathbb{P}(A_n)$ (à terme constants) d'où le résultat.
3. On a

**Exercice 2**

On souhaite montrer qu'il n'existe pas de proba $\mathbb{P}$ sur la tribu $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\mathbb{P}(A_n)=\frac{1}{n}$ où $A_n$ est l'ensemble des multiples de $n$. On raisonne par l'absurde.

1. Montrer que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants où $\mathcal{P}=\{p_i, i\in\mathbb{N}\}$ est l'ensemble des nombres premiers.
2. Soit $A=\bigcap_{r\geq 1}\bigcup_{i\geq r}A_{p_i}=\limsup_i A_i$. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. En déduire une contradiction. Indication : montrer que $n\in A\iff n$ a une infinité de diviseurs premiers.

**Exercice 3**

1. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) := \dfrac{1}{n(n+1)}$ définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer la probabilité que $n$ soit pair. Indication / Astuce : il faut forcer l'apparition de la série harmonique.

**Solution**

1. Somme télescopique
2. $1 - \ln(2)$

**Exercice 4 (Borell-Cantelli 1)**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n\geq 0} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$ est de probabilité nulle.

**Solution**

On a $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k) \leq \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) =$ reste partiel d'une série convergente. Par théorème de continuité décroissante sur les $\left(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k\right)_n$, $\mathbb{P}(\limsup\limits_n A_n) = 0$.

**Exercice 5 (Borell-Cantelli 2)**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n\geq 0} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$ est de probabilité 1.
Application : On lance une pièce truquée ($0 < p < 1$ d'avoir pile) une infinité de fois. Montrer que l'événement "il apparaît une infinité de fois pile, et ce $m$ fois à la suite" est presque sûr pour tout $m$.

**Exercice 6**

Soient $n \geq 2$ et pour $p \in [\![0, n]\!]$, $A_p$ l'événement "$n$ est divisible par $p$". (C'est l'ensemble des multiples de $p$). On considère la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$. Qu'obtient-on si $p$ divise $n$ ?
2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont **les** diviseurs premiers distincts de $n$ alors les $A_{p_i}$ sont mutuellement indépendants.
3. Montrer que $\dfrac{\phi(n)}{n} = \prod\limits_{i=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right)$

**Solution**

1. $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor}{n}$.
2. Provient du fait qu'être divisible par $p_1, \ldots, p_r$ est équivalent à être divisible par le produit et donc que $A_{\prod_{i=1}^r p_i} = \bigcap_{i=1}^{r} A_{p_i}$.On calcule ensuite $\mathbb{P}(\bigcap_{i} A_{p_i})$ grâce à cela.
3. Provient de $\varphi(n) = \#\left(\bigcap_{i=1}^{r} \overline{A_{p_i}}\right)$ où les $p_i$ sont tous les facteurs premiers de $n$.

**Exercice 7**

Montrer qu'une v.a.r.d bornée est $L^p$ pour tout $p < +\infty$.

**Solution**

Formule des moments (formule de transfert).

**Exercice 8**

Montrer que $X$ et $Y$ deux vard sont indépendantes ssi pour toutes fonctions $f, g$ mesurables bornées définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$.

**Solution**

On applique le transfert d'indépendance / lemme des coalitions pour le sens direct. On applique à $f = \mathbb{1}_A$ ou $\mathbb{1}_{\{x\}}$ et idem $g$ pour le sens indirect.

**Exercice 9**

Soient deux vard $X$ et $Y$ telles qu'il existe $\varphi$, $\psi$ fonctions mesurables telles que

$$\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \varphi(x)\psi(y)$$

pour tous $x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes et qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbb{P}(X = x) = a\varphi(x) \text{ et } \mathbb{P}(X = x) = b\varphi(x)$$

pour tous $x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

**Solution**

On écrit $\mathbb{P}(X=x)$ avec le système complet d'événements $\{x = X \cap Y = y\}_y$ qu'on a sous la main. On trouve

$$\mathbb{P}(X=x) = \varphi(x) \sum_{y \in Y(\Omega)} \psi(y)$$

d'où

$$\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) = \varphi(x)\varphi(y) \sum_{y' \in Y(\Omega)} \psi(y') \sum_{x' \in Y(\Omega)} \varphi(x') = ab\varphi(x)\varphi(y)$$

où $a = \displaystyle\sum_{x' \in Y(\Omega)} \varphi(x')$ et $b = \displaystyle\sum_{y' \in Y(\Omega)} \psi(y')$. Par ailleurs en sommant on trouve que $1 = ab$ (car $\mathbb{P}$ est une proba et que $\{x = X \cap Y = y\}_{x,y}$ est un système complet d'événements), d'où l'indépendance de $X$ et $Y$.

**Exercice 10 (Approximation de Binomiale par Poisson)**

Soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $p_n$ une suite de réels strictement positifs telle que $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

**Solution**

On écrit la définition puis on fait un DL à l'ordre 0. On n'a pas besoin de la fomule de Stirling.

**Exercice 11 (Somme de lois de Poisson)**

Soient $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$, $1 \leq k \leq n$ des vai. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_k X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum \lambda_k$. On pourra commencer par traiter le cas $n = 2$.

**Solution**

On a $\mathbb{P}(S = m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(X_1 = k \cap X_2 = m - k)$ que l'on calcule par indépendance.

**Exercice 12**

Montrer que $\mathbb{E}(XY)$ munit l'espace vectoriel $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ d'un produit scalaire. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Etudier le cas d'égalité.

**Solution**

$\mathbb{E}(X^2) = 0$ implique $X^2 = 0$ presque partout.
Cas d'égalité : $\langle X, Y \rangle = \|X\| \, \|Y\|$ ssi $X$ et $Y$ sont colinéaires dans l'ev $L^2$, c'est à dire qu'il existe $a, b$ tel que, presque partout, $aX + bY = 0$. On peut éventuellement séparer les cas $X = 0$ pp et le cas complémentaire pour montrer :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 \text{ ou alors } \exists c, \mathbb{P}(Y = cX) = 1.$$

**Exercice 13 (Un autre exo sur Zeta)**

Soit $s > 1$ et $X$ une va réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $A_n$ l'événement "$X$ est divisible par $n$".

1. Montrer que cela définit bien une loi
2. Montrer les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire une preuve probabiliste de

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

4. Montrer que la probabilité qu'aucun carré (différent de 1) ne divise $X$ est $\dfrac{1}{\zeta(2s)}$.

**Solution**

1. La somme fait bien 1. On utilise le résultat qui dit que si on a une suite $u_n$ de réels positifs de somme 1 alors il existe bien un espace probabilisé et une vard tels que la mesure de proba $\mathbb{P}_X$ vérifie $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = n) = u_n$.
2. Provient du fait qu'être divisible par $p_1, \dots, p_r$ est équivalent à être divisible par le produit et donc que $A_{\prod_{i=1}^r p_i} = \bigcap_{i=1}^{r} A_{p_i}$. Plus précisément si on écrit $A_n = \sqcup_j \{X = nj\}$ on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(nj)^{-s}}{\zeta(s)} = n^{-s}.$$

d'où $\mathbb{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}) = \prod_1^m p_k^{-s} = \prod_1^m \mathbb{P}(A_{p_k})$

3. On utilise le théorème de continuité décroissante sur $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}$. On obtient

$$\lim_n \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}\right)$$

Enfin $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p} = \{X = 1\}$ (seul entier naturel non nul sans diviseur premier). Donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}\right) = \mathbb{P}(\{X = 1\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$.

4. On note $A$ cet événement. On a $A = \cap$