Colles 2021-2022 S15 - Topologie

1 Questions de cours

Sauf mention contraire, on se place sur $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Question de cours 1

Donnez la fonction génératrice de la loi de Poisson.

Question de cours 2

Donnez la fonction génératrice de la loi géométrique.

Question de cours 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$ en donnant un domaine de validité pour cette égalité.

Question de cours 4

Donnez et démontrez la caractérisation séquentielle des fermés.

Question de cours 5

Montrer qu'une boule ouverte est ouverte. / fermée est fermée

Question de cours 6

Trouver deux parties A et B d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ (à choisir) tel que les cinq ensembles suivants soient deux à deux différents : $A \cup B$, $\mathring{A} \cup B$, $A \cup \mathring{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B}$, $\widehat{A \cup B}^{\circ}$.

2 Exercices

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. En déduire que cela définit bien une loi de probabilité.
2. Calculer la fonction génératrice G_X de X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = a(k+1)p^k$.

1. Calculer la fonction génératrice G_X de X.
2. En déduire a.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

Exercice 3

Soient $l, m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = lm$. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $Z = X + Y$ et on suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, n-1]\!])$ et $Z \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, n-1]\!])$. En calculant la fonction génératrice de G_Y, retrouver la loi de Y.

Exercice 4

Soit $A \subset E$ non vide. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

Exercice 5

Soit $A \subset E$ non vide bornée. Montrer que $diam(A) = diam(\overline{A})$ où $diam(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A} \|x - y\|$.

Exercice 6

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

Exercice 7

Soit $A \subset E$. Montrer que la frontière ∂A de A vérifie $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$.

Exercice 8

Soit $C \subset E$ un convexe non vide.

1. Montrer que $\overline{C}$ est convexe.
2. Montrer que $\mathring{C}$ est convexe.

Exercice 9

Soient A, B des parties de E. On pose $A + B := \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. On suppose A et B ouvertes. Montrer que $A + B$ est ouverte. Indication : on pourra commencer par prouver le cas $B = \{b\}$.
2. Trouver un exemple où A et B sont fermées mais $A + B$ n'est pas fermée.