Colles 2021-2022 S15 - Topologie

1 Questions de cours

Sauf mention contraire, on se place sur $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Question de cours 1

Donnez la fonction génératrice de la loi de Poisson.

Solution

$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

Question de cours 2

Donnez la fonction génératrice de la loi géométrique.

Solution

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

Question de cours 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$ en donnant un domaine de validité pour cette égalité.

Question de cours 4

Donnez et démontrez la caractérisation séquentielle des fermés.

Solution

Soit $x \in \overline{A}$. Pour $r = \dfrac{1}{n} > 0$, $\mathcal{B}(x, r)$ contient un élément de A que l'on peut noter x_n. On construit une suite d'éléments de A qui converge vers x. Réciproquement pour toute suite $x_n \in A$ qui converge, en notant x la limite on peut trouver un x_n dans la boule $\mathcal{B}(x, r)$, ce quel que soit $r > 0$.

Question de cours 5

Montrer qu'une boule ouverte est ouverte. / fermée est fermée

Question de cours 6

Trouver deux parties A et B d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ (à choisir) tel que les cinq ensembles suivants soient deux à deux différents : $A \cup B$, $\mathring{A} \cup B$, $A \cup \mathring{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B}$, $\overbrace{A \cup B}^{\circ}$.

Solution

$A =]4,5[$ et $B =]5,6]$ conviennent. (A et B non fermés non ouverts et qui possèdent un point d'accumulataion commun)

2 Exercices

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. En déduire que cela définit bien une loi de probabilité.
2. Calculer la fonction génératrice G_X de X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Solution

$G_X(t) = \dfrac{t^2}{4(1 - t/2)^2}$. $\mathbb{E}[X] = 4$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = a(k+1)p^k$.

1. Calculer la fonction génératrice G_X de X.
2. En déduire a.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

Solution

$G_X(t) = \dfrac{a}{(1-pt)^2}$. On trouve $a = (1-p)^2$, $\mathbb{E}[X] = \dfrac{2p}{1-p}$ et $\mathbb{E}[X] = \dfrac{2p}{(1-p)^2}$.

Exercice 3

Soient $l, m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = lm$. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $Z = X + Y$ et on suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket)$ et $Z \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket)$. En calculant la fonction génératrice de G_Y, retrouver la loi de Y.

Solution

$G_Z = G_x G_Y$ avec $G_X(t) = \dfrac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} t^k = \dfrac{t^l - 1}{l(t-1)}$. On trouve $G_Y(t) = \dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} t^{lk}$ d'où $\mathbb{P}(Y = kl) = \dfrac{1}{m}$ pour $0 \leq k \leq m-1$ et donc $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, (m-1)l \rrbracket)$.

Exercice 4

Soit $A \subset E$ non vide. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

Exercice 5

Soit $A \subset E$ non vide bornée. Montrer que $diam(A) = diam(\overline{A})$ où $diam(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A} \|x - y\|$.

Solution

$\phi : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est continue sur $A \times A$ qui est borné donc elle est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 6

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

Solution

On a $A \subset \overline{A}$ donc $d(x, A) \geq d(x, \overline{A})$ (se montre avec un passage à l'infimum). Pour la réciproque, d'après la caractérisation de la borne inférieure $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in \overline{A}\}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\overline{A})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x, \overline{A}) \leq d(x, a_n) \leq d(x, \overline{A}) + \frac{1}{n+1}.$$

Or $a_n \in \overline{A}$ donc $d(a_n, A) = 0$ (exercice classique). Donc par inégalité triangulaire, $d(x, A) \leq d(x, a_n) + d(a_n, A) = d(x, a_n) + 0$. Il suffit pour montrer cela de passer à l'infimum (à n fixé) sur l'inégalité triangulaire "point par point" :

$$\forall b \in A,\ d(x, A) \leq d(x, b) \leq d(x, a_n) + d(a_n, b).$$

On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x, A) \leq d(x, a_n) \leq d(x, \overline{A}) + \frac{1}{n+1}.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.

Exercice 7

Soit $A \subset E$. Montrer que la frontière ∂A de A vérifie $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$.

Exercice 8

Soit $C \subset E$ un convexe non vide.

1. Montrer que $\overline{C}$ est convexe.
2. Montrer que $\mathring{C}$ est convexe.

Solution

1. Suites, 2. dessin.

Exercice 9

Soient A, B des parties de E. On pose $A + B := \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. On suppose A et B ouvertes. Montrer que $A + B$ est ouverte. Indication : on pourra commencer par prouver le cas $B = \{b\}$.
2. Trouver un exemple où A et B sont fermées mais $A + B$ n'est pas fermée.

Solution

On montre que $A+\{b\}$ est ouvert. On écrit ensuite $A+B = \bigcup_{b\in B} A+\{b\}$ qui est ouvert par réunion d'ouverts.

Contre-exemple pour les fermés : $B =$ axe des ordonnées et $A =$ graphe de la fonction inverse.