Colles 2021-2022 S16 - Topologie 2

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer que l'image d'un compact par une fonction continue est compacte. Cela reste-il en remplaçant "compact" par "fermé" ? Si oui, démontrez-le. Si non, donnez un contre-exemple.

Question de cours 2

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $D \subset E$ une partie dense. Soit $f \in \mathcal{C}^0(D, F)$. Montrer que f admet un prolongement continu $\tilde{f}$ sur E.

Question de cours 3

Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes sur E. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un autre evn. Montrer que $f : E \to F$ est continue pour $\|\cdot\|_1$ si et seulement si elle l'est pour $\|\cdot\|_2$.

Question de cours 4

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que les fermés bornés de E sont les compacts.

2 Exercices

Exercice 1

Soit $A \subset E$ non vide. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

Exercice 2

Soit $A \subset E$ non vide bornée.

1. Montrer que $\overline{A}$ est bornée.
2. Montrer que $diam(A) = diam(\overline{A})$ où $diam(A) = \sup\limits_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$.

Exercice 3

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

Exercice 4

Soit $A \subset E$. Montrer que la frontière ∂A de A vérifie $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$.

Exercice 5

Soit $C \subset E$ un convexe non vide.

1. Montrer que $\overline{C}$ est convexe.
2. Montrer que $\mathring{C}$ est convexe.

Exercice 6

Soient A, B des parties de E. On pose $A + B := \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. On suppose A et B ouvertes. Montrer que $A + B$ est ouverte. Indication : on pourra commencer par prouver le cas $B = \{b\}$.
2. Trouver un exemple où A et B sont fermées mais $A + B$ n'est pas fermée.

Exercice 7

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ continue. Montrer que l'image d'une partie dense de E par f est dense dans F.

Exercice 8 (Théorème de Riesz)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Le but est de démontrer que E est de dimension finie si et seulement si la sphère unité $\mathscr{S}(0,1)$ de E est compacte.

1. Soit F un sous-espace de dimension finie de E.
   (a) Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = d(a, x)$.
   (b) On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $d(a, F) = 1$ et $\|a\| = 1$.
2. On suppose ici seulement que $\dim(E) = +\infty$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|a_n\| = 1$ et $d(a_{n+1}, \operatorname{vect} a_0, \dots, a_n) = 1$. En déduire que la sphère unité $\mathscr{S}(0,1)$ de E n'est pas compacte.
3. Conclure.

Exercice 9 (Dual de l^1 et de l^∞)

On note l^1 l'ensemble des suites réelles telles que $\|x\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n < +\infty$. On ne demande pas de re-démontrer que $(l^1, \|\cdot\|_1)$ est un evn. De même, on note l^∞ l'espace des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme $\|x\|_\infty := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

1. On note, pour $p \in \mathbb{N}$, $e^p = (e^p_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $F = \operatorname{vect} e^p, p \in \mathbb{N}$ est dense dans l^1.
2. Soit $a \in l^\infty$. Montrer que
$$\varphi_a : \begin{pmatrix} l^1 & \to & \mathbb{R} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \end{pmatrix}$$
est bien définie, linéaire et continue.
3. Réciproquement, montrer que si $\psi \in (l^1)'$ est une forme linéaire continue sur L^1 alors il existe $a \in l^\infty$ telle que $\psi = \varphi_a$.

Exercice 10

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $\varphi \in E^*$. Montrer que φ est continue ssi $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est fermé.

Exercice 11

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12 (Norme subordonnée et série de Neumann)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $\mathcal{L}(E, F)$ l'algèbre des applications linéaires continues de E vers F. On le munit de la norme subordonnée $\|u\| := \sup\limits_{\|u(x)\|_F, x \in \mathscr{S}_E(0,1)}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie. On admettra les autres axiomes qui en font une norme.
2. Montrer que $\|u\| = \min\{C > 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$.
3. Montrer que pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, $\|u \circ v\|$.
4. Application : soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\|u\| < 1$. Trouver une formule explicite pour l'inverse de u.

Exercice 13 (Un peu de connexité par arcs)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace fermé de E. On suppose que F est différent de E et que sa frontière ∂F est connexe par arcs.

1. Soient $x \in \mathring{F}$ et $y \in E \setminus F$. Montrer qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to E$ reliant x à y et un instant $c \in [0,1]$ tels que $\gamma(c) \in \overline{F} \cap \overline{E \setminus F}$. En déduire que $\gamma(c) \in \partial F$.
2. En déduire que F est connexe par arcs. On pourra s'appuyer sur un dessin.

Exercice 14

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties fermées de E.

1. On suppose que A est compact. Montrer que $A + B$ est fermé.
2. Trouver un contre-exemple de parties A et B fermées telles que $A + B$ ne soit pas fermé.

Exercice 15

Trouver deux parties A et B d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ (à choisir) tel que les cinq ensembles suivants soient deux à deux disjoints : $A \cup B$, $\mathring{A} \cup B$, $A \cup \mathring{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B}$, $\widehat{A \cup B}$ avec un rond au-dessus,