

Colles 2021-2022 S16 - Topologie 2

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer que l'image d'un compact par une fonction continue est compacte. Cela reste-il en remplaçant "compact" par "fermé"? Si oui, démontrez-le. Si non, donnez un contre-exemple.

Solution

On extrait une suite d'antécédents et on utilise la continuité séquentielle de f . Pour le contre-exemple, $\arctan(\mathbb{R})$ convient.

Question de cours 2

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $D \subset E$ une partie dense. Soit $f \in \mathcal{C}^0(D, F)$. Montrer que f admet un prolongement continu $\tilde{f}$ sur E .

Question de cours 3

Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes sur E . Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un autre evn. Montrer que $f : E \rightarrow F$ est continue pour $\|\cdot\|_1$ si et seulement si elle l'est pour $\|\cdot\|_2$.

Solution

On suppose que f est continue pour la première norme. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - y\|_1 \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

D'autre par il existe $c > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq c \|\cdot\|_2$ donc

$$\|x - y\|_2 \leq c\delta \Rightarrow \|x - y\|_1 \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Question de cours 4

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que les fermés bornés de E sont les compacts.

2 Exercices

Exercice 1

Soit $A \subset E$ non vide. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

Exercice 2

Soit $A \subset E$ non vide bornée.

1. Montrer que $\overline{A}$ est bornée.
2. Montrer que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$ où $\text{diam}(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$.

Solution

Carac borne inf

Exercice 3

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

Solution

On a $A \subset \overline{A}$ donc $d(x, A) \geq d(x, \overline{A})$ (se montre avec un passage à l'infimum). Pour la réciproque, d'après la caractérisation de la borne inférieure $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x, \overline{A}) \leq d(x, a_n) \leq d(x, \overline{A}) + \frac{1}{n+1}.$$

Or $a_n \in A$ donc $d(a_n, A) = 0$ (exercice classique). Donc par inégalité triangulaire, $d(x, A) \leq d(x, a_n) + d(a_n, A) = d(x, a_n) + 0$. Il suffit pour montrer cela de passer à l'infimum (à n fixé) sur l'inégalité triangulaire "point par point" :

$$\forall b \in A, d(x, A) \leq d(x, b) \leq d(x, a_n) + d(a_n, b).$$

On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x, A) \leq d(x, a_n) \leq d(x, \overline{A}) + \frac{1}{n+1}.$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.

Exercice 4

Soit $A \subset E$. Montrer que la frontière ∂A de A vérifie $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$.

Exercice 5

Soit $C \subset E$ un convexe non vide.

1. Montrer que $\overline{C}$ est convexe.
2. Montrer que $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

Solution

1. Suites, 2. dessin.

Exercice 6

Soient A, B des parties de E . On pose $A + B := \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. On suppose A et B ouvertes. Montrer que $A + B$ est ouverte. Indication : on pourra commencer par prouver le cas $B = \{b\}$.
2. Trouver un exemple où A et B sont fermées mais $A + B$ n'est pas fermée.

Solution

On montre que $A + \{b\}$ est ouvert. On écrit ensuite $A + B = \bigcup_{b \in B} A + \{b\}$ qui est ouvert par réunion d'ouverts.
 Contre-exemple pour les fermés : $B = \text{axe des ordonnées}$ et $A = \text{graphe de la fonction inverse}$.

Exercice 7

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \rightarrow F$ continue. Montrer que l'image d'une partie dense de E par f est dense dans F .

Solution

Par les suites.

Exercice 8 (Théorème de Riesz)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Le but est de démontrer que E est de dimension finie si et seulement si la sphère unité $\mathcal{S}(0, 1)$ de E est compacte.

1. Soit F un sous-espace de dimension finie de E .
 - (a) Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = d(a, x)$.
 - (b) On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $d(a, F) = 1$ et $\|a\| = 1$.
2. On suppose ici seulement que $\dim(E) = +\infty$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n\| = 1$ et $d(a_{n+1}, \text{vect } a_0, \dots, a_n) = 1$. En déduire que la sphère unité $\mathcal{S}(0, 1)$ de E n'est pas compacte.
3. Conclure.

Solution

1. (a) Par caractérisation de la borne inférieure ($x_n \in F$ tel que $d(a, F) \leq d(a, x_n) \leq d(x, F) + \frac{1}{n}$) et par le fait que F soit fermé.
- (b) Soit $a_0 \in E \setminus F$. On a $\varepsilon := d(a, F) > 0$ car F fermé et $d(y, F) = 0$ ssi $y \in \overline{F} = F$. On a posé $a = a_0 / \|a_0\|$ de manière à avoir $a \in \mathcal{S}(0, 1)$. Donc en prenant un x convenant pour a par la question précédente, et $\lambda := \frac{1}{\varepsilon}$, on a $d(\lambda x, \lambda a) = \lambda \|x - a\| = 1$.
2. Par récurrence sur $F_n = \text{vect } a_0, \dots, a_n$. Pour a_0 on peut prendre n'importe qui de non nul. Il faut quand même veiller à prendre a_i libre pour pouvoir conclure (possible car E est de dimension finie : $E \setminus F_n$ est toujours non vide).
3. Si E est de dimension infinie, on a montré le résultat précédemment (à écrire quand même : par l'absurde si c'est compact : on extrait une sous-suite convergente des a_n qui converge, et en particulier $d(a_n, a_{n-1}) \rightarrow 0$, ce qui est contradictoire). Si E est de dimension finie, la sphère est un fermé borné et est donc compacte.

Exercice 9 (Dual de l^1 et de l^∞)

On note l^1 l'ensemble des suites réelles telles que $\|x\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n < +\infty$. On ne demande pas de re-démontrer que $(l^1, \|\cdot\|_1)$ est un evn. De même, on note l^∞ l'espace des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme $\|x\|_\infty := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

1. On note, pour $p \in \mathbb{N}$, $e^p = (e_n^p)_{n \in \mathbb{N}} := (\delta_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $F = \text{vect } e^p, p \in \mathbb{N}$ est dense dans l^1 .
2. Soit $a \in l^\infty$. Montrer que

$$\varphi_a : \begin{pmatrix} l^1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \end{pmatrix}$$

est bien définie, linéaire et continue.

3. Réciproquement, montrer que si $\psi \in (l^1)'$ est une forme linéaire continue sur l^1 alors il existe $a \in l^\infty$ telle que $\psi = \varphi_a$.

Solution

Pour la dernière question : on prend $a_n := \psi(e^n)$. On a bien $a \in l^\infty$ car ψ est continue donc $\|a\|_\infty \leq \|\psi\|_{(l^1)'} \|e^n\|_1 = \|\psi\|_{(l^1)'}$. Ensuite, $\psi = \varphi_a$ car ce sont deux applications (linéaires) continues coïncidant sur F qui est dense dans l^1 .

Exercice 10

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $\varphi \in E^*$. Montrer que φ est continue ssi $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé.

Exercice 11

Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution

Ouvert : c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par $\det$. On justifiera bien la continuité de $\det$ (formule sale de la somme). Densité : on approche M par $M - \frac{1}{k}I_n$. C'est bien inversible à partir d'un certain rang car le polynôme $\det(M - XI_n)$ n'a qu'un nombre fini de racines dans $\mathbb{R}^*$.

Exercice 12 (Norme subordonnée et série de Neumann)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $\mathcal{L}(E, F)$ l'algèbre des applications linéaires continues de E vers F . On le munit de la norme subordonnée $\|u\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie. On admettra les autres axiomes qui en font une norme.
2. Montrer que $\|u\| = \min\{C > 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E\}$.
3. Montrer que pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, $\|u \circ v\|$.
4. Application : soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\|u\| < 1$. Trouver une formule explicite pour l'inverse de u .

Exercice 13 (Un peu de connexité par arcs)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace fermé de E . On suppose que F est différent de E et que sa frontière ∂F est connexe par arcs.

1. Soient $x \in \overset{\circ}{F}$ et $y \in E \setminus F$. Montrer qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ reliant x à y et un instant $c \in [0, 1]$ tels que $\gamma(c) \in \overline{F} \cap \overline{E \setminus F}$. En déduire que $\gamma(c) \in \partial F$.
2. En déduire que F est connexe par arcs. On pourra s'appuyer sur un dessin.

Solution

On pose c le premier instant pour lequel γ quitte F . On a, par minimalité de cet instant c et par caractérisation de la borne inférieure, une suite minimisante $c_n \in [c, 1]$ qui tend vers c et telle que $\gamma(c_n) \in E \setminus F$. Par continuité de γ , $c \in \overline{E \setminus F}$. Ensuite, on considère $c_n = c - \frac{c}{2n}$ une suite de $[0, c[$ qui tend vers c . Alors par continuité de γ , $\gamma(c_n) \rightarrow \gamma(c) \in \overline{F} = F$.

Exercice 14

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties fermées de E .

1. On suppose que A est compact. Montrer que $A + B$ est fermé.
2. Trouver un contre-exemple de parties A et B fermées telles que $A + B$ ne soit pas fermé.

Solution

Soit $u_n = a_n + b_n$ qui converge. Montrons que sa limite u est dans $A + B$. On extrait de a_n une sous-suite qui cv. On note a sa limite. On note b la limite de $u_n - a_n \in B$. Puisque A et B sont fermés, $a + b = u \in A + B$.
Contre-exemple : graphe de la fonction inverse et l'axe des ordonnées. En effet $A + B$ n'est pas fermé : la suite de terme général $(n, \frac{1}{n}) + (-n, 0) \in A + B$ converge vers $(0, 0)$, mais $(0, 0)$ n'est pas dans $A + B$.

Exercice 15

Trouver deux parties A et B d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ (à choisir) tel que les cinq ensembles suivants soient deux à deux disjoints : $A \cup B$, $\overset{\circ}{A} \cup B$, $A \cup \overset{\circ}{B}$, $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, $\widehat{A \cup B}$,