Colles 2021-2022 S18 - Espaces préhilbertiens

Vincent Louatron

1 Questions de cours

Question de cours 1

Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On donnera également une CNS d'égalité.

Question de cours 2

Enoncer et démontrer le théorème de projection orthogonal dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Question de cours 3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et u une isométrie vectorielle (endomorphisme orthogonal). Montrer que u est inversible et donner son inverse.

2 Exercices

Exercice 1 (Un contre-exemple)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_0^1 fg$.

1. Déterminer $F^\perp$ où $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.
2. En déduire que $E \neq F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$. Quelle hypothèse est mise en défaut ici ?

Exercice 2 (Formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in E^*$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in E$ telle que

$$\forall M \in E, \phi(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

Exercice 3 (Propriétés de l'orthogonal)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient A et B deux parties de E. Montrer les trois propriétés suivantes :

1. $A^\perp$ est fermée
2. $A \subset B \Leftrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
3. $A^\perp = (\overline{A})^\perp = (\mathrm{vect}\,(A))^\perp$

Exercice 4 (Vers les séries de Fourier)

On se place sur $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}), \|f\|_2 < +\infty\}$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit hermitien $\langle f,g\rangle := \displaystyle\int_0^1 f\overline{g}$. On note enfin $l^2 = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \|u\|_{l^2} < +\infty\}$, où $\|\cdot\|_{l^2}$ est la norme associée au produit hermitien $\langle u,v\rangle := \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n\overline{v_n}$.

1. On considère la fonction définie, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0,1]$, par $e_n(x) := e^{inx}$. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de E. On admettra que c'est également une famille dense dans E.
2. Soit $f \in E$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-inx}dx$. Montrer que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de l^2.
3. Soit $f \in E$. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$, converge absolument. Montrer que $\forall x \in [0,1], f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e_n(x)$ et exprimer $\|f\|_2$ en fonction de $\|u\|_{l^2}$.

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx\right)$.

Exercice 6 (Polynômes orthogonaux)

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(Q_n) = n$.
2. Déterminer Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3.
3. Étudier la parité de Q_n.
4. En introduisant le polynôme $T = \displaystyle\prod_{a\in S}(X-a)$, où S est l'ensemble des racines de multiplicité impaire de Q_n, montrer que Q_n admet exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.

Exercice 7 (Projecteurs orthogonaux)

Soit E un espace euclidien. Soit p un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Indication : on pourra considérer les vecteurs $\lambda x + y$ avec $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 8

On se place dans E un espace euclidien. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.
2. Montrer qu'un projecteur est orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.
3. En utilisant le fait que $\mathcal{S}(E)$ est un espace vectoriel, déterminer les symétries qui sont aussi des endomorphismes symétriques.