Colles 2021-2022 S18 - Espaces préhilbertiens

Vincent Louatron

1 Questions de cours

Question de cours 1

Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On donnera également une CNS d'égalité.

Solution

On considère le polynôme $t \mapsto \langle x + ty, x + ty \rangle$. En étudiant son discriminant, on montre l'ICS. Cas d'égalité : colinéarité.

Question de cours 2

Enoncer et démontrer le théorème de projection orthogonal dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Solution

Pythagore.

Question de cours 3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et u une isométrie vectorielle (endomorphisme orthogonal). Montrer que u est inversible et donner son inverse.

Solution

C'est l'adjoint (théorème de Riesz).

2 Exercices

Exercice 1 (Un contre-exemple)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_0^1 fg$.

1. Déterminer $F^\perp$ où $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.
2. En déduire que $E \neq F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$. Quelle hypothèse est mise en défaut ici ?

Solution

$F^\perp = \{0\}$.

Exercice 2 (Formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in E^*$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in E$ telle que

$$\forall M \in E, \phi(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

Solution

Théorème de Riesz ! Il faut penser à montrer que la trace fournit un produit scalaire sur E.

Exercice 3 (Propriétés de l'orthogonal)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient A et B deux parties de E. Montrer les trois propriétés suivantes :

1. $A^\perp$ est fermée
2. $A \subset B \Leftrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
3. $A^\perp = (\overline{A})^\perp = (\mathrm{vect}\,(A))^\perp$

Solution

1. $A^\perp = \displaystyle\bigcap_{a \in A} a^\perp = \bigcap_{a \in A} \mathrm{Ker}(\langle a, \cdot \rangle)$.
2. Ok
3. Inclusions non évidentes : $A^\perp \subset (\overline{A})^\perp$ (se fait en écrivant, pour un $x \in A^\perp$ et $a \in A$, $a = \lim a_n$ et en testant a et x) et $A^\perp \subset (\mathrm{vect}\,(A))^\perp$ (se fait à la main en testant des produits scalaires sur un élément $\sum \lambda_i a_i$ de $\mathrm{vect}\,(A)$).

Exercice 4 (Vers les séries de Fourier)

On se place sur $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C}), \|f\|_2 < +\infty\}$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit hermitien $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_0^1 f\overline{g}$. On note enfin $l^2 = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \|u\|_{l^2} < +\infty\}$, où $\|\cdot\|_{l^2}$ est la norme associée au produit hermitien $\langle u, v \rangle := \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$.

1. On considère la fonction définie, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0, 1]$, par $e_n(x) := e^{inx}$. Montrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de E. On admettra que c'est également une famille dense dans E.
2. Soit $f \in E$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-inx}dx$. Montrer que $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de l^2.
3. Soit $f \in E$. On suppose que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)$, converge absolument. Montrer que $\forall x \in [0, 1], f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e_n(x)$ et exprimer $\|f\|_2$ en fonction de $\|u\|_{l^2}$.

Solution

1. Les deux aspects (caractère unitaire et orthogonalité) sont de simples calculs d'intégrales.
2. Inégalité de Cauchy-Schwartz.
3. Si on n'a pas déjà fait le calcul précédemment, la formule de Parseval donne $\|f\|_2 = \|u\|_{l^2}$. On peut utiliser cette formule car on a une famille totale dans l'espace préhilbertien E.

Exercice 5

Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \right)$.

Solution

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \right) = d(X^2, R_1[X])^2 = \left\| X^2 - p_{R_1[X]}(X^2) \right\|_2^2 = \frac{1}{180}$$

Exercice 6 (Polynômes orthogonaux)

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(Q_n) = n$.
2. Déterminer Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3.
3. Étudier la parité de Q_n.
4. En introduisant le polynôme $T = \prod_{a\in S}(X - a)$, où S est l'ensemble des racines de multiplicité impaire de Q_n, montrer que Q_n admet exactement n racines distinctes dans $]-1, 1[$.

Solution

1. Pour l'unicité on peut faire par récurrence : on prend une autre base R_n et dans l'hérédité on montre que $R_n - Q_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en testant sur les Q_k, $k \leq n-1$.
2. $Q_0 = 1$. On cherche Q_1 tel que $Q_1 = X + c$ et $\langle Q_0, Q_1\rangle = 0$ i.e $2c = 0$. On trouve $Q_1 = X$. On continue : $Q_2 = X^2 - 1/3$ et $Q_3 = X^3 - 3/5X$.
3. On utilise l'unicité sur la famille orthogonale (à montrer) unitaire échelonnée de degré 1 qu'est $R_n = (-1)^n Q_n(-X)$. (changement de var dans le produit scalaire pour mq R_n est orthogonal à $R_{n-1}[X]$).
4.

Exercice 7 (Projecteurs orthogonaux)

Soit E un espace euclidien. Soit p un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Indication : on pourra considérer les vecteurs $\lambda x + y$ avec $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$.

Solution

Si p est orthogonal, on obtient le résultat par Pythagore : $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$
Si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$, on veut montrer que $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.
Si l'on écrit l'inégalité avec un vecteur $\lambda x + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathrm{Ker}(p)^2$ comme proposé, on obtient

$$\|p(\lambda x + y)\| \leq |\lambda| \|x\| .$$

En particulier, si

Exercice 8

On se place dans E un espace euclidien. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.
2. Montrer qu'un projecteur est orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.
3. En utilisant le fait que $\mathcal{S}(E)$ est un espace vectoriel, déterminer les symétries qui sont aussi des endomorphismes symétriques.