

Colles 2021-2022 S19 - Espaces préhilbertiens et équa diff

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer qu'un projecteur est symétrique si et seulement si il est orthogonal.

Question de cours 2

Soient E, F, G des ev de dimension finie. Montrer qu'une application bilinéaire $B : E \times F \rightarrow G$ est différentiable et donner sa différentielle.

Question de cours 3

Énoncer le théorème de dérivation d'une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow E$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et E un ev de dimension finie.

2 Exercices

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Etudier la différentiabilité de $t \mapsto e^{tA}x$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ ainsi que de $t \mapsto \|e^{tA}\|^2$. Donnez leur dérivée.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt$.

Exercice 2

Soit $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Exercice 3

Soit $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminez la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Exercice 4

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (Racine carrée d'une matrice symétrique positive)

On désigne par $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives) réelles de taille n . On rappelle les définitions respectives :

- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x \rangle \geq 0\}$
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle Ax, x \rangle > 0\}$

1. Montrer qu'une matrice est symétrique positive (resp définie positive) ssi elle a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$ (resp. dans $\mathbb{R}_+^*$).
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une "racine" à A , c'est à dire une matrice B telle que $B^2 = A$.
3. On suppose maintenant $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la racine B de A est unique.

Exercice 8 (Norme d'une matrice symétrique)

Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On définit, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

On pose $\rho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in \sigma_p(A)\}$ le rayon spectral où σ_p est le spectre de A .

1. Justifier rapidement que la quantité $\|A\|$ est bien définie pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A\| = \rho(A)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer que $\|A\|^2 = \rho({}^tAA)$. En déduire que $\|A\|^2 = \|{}^tAA\|$