Colles 2021-2022 S19 - Espaces préhilbertiens et équa diff

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer qu'un projecteur est symétrique si et seulement si il est orthogonal.

Question de cours 2

Soient E, F, G des ev de dimension finie. Montrer qu'une application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est différentiable et donner sa différentielle.

Solution

Définition, et continuité d'une appli bilinéaire en dim finie.

Question de cours 3

Énoncer le théorème de dérivation d'une suite de fonctions $f_n : I \to E$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et E un ev de dimension finie.

Solution

Contre-exemples : $\sqrt{x + \frac{1}{n}}$ ou $\frac{1}{n} + \frac{1}{2} x\,|x|$.

2 Exercices

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Etudier la différentiabilité de $t \mapsto e^{tA}x$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ ainsi que de $t \mapsto \left\|e^{tA}\right\|^2$. Donnez leur dérivée.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle dt$.

Solution

1. Différentiabilité : composition avec exp. $Ae^{tA}x$ et $2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle$.
2. $-\|x\|$.

Exercice 2

Soit $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 3

Soit $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminez la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Solution

Première réponse : c'est un endo symétrique (oui). Deuxième réponse : c'est la matrice de projection orthogonale sur la droite $D = \operatorname{vect} u$ dans la base canonique. On peut pour cela calculer $A^2 = A$ puis $\operatorname{Ker}(A - I_3) = D$ et/ou $\operatorname{Ker}(A) = D^\perp$ ou bien remarquer que c'est $u\,{}^t u$.

1. $u = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $u = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

1. -3 simple et 3 double. $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.
2. $3, 6, 9$. $P = (2/3, 2/3, -1/3), (-1/3, 2/3, 2/3), (2/3, -1/3, 2/3)$.
3.

Exercice 7 (Racine carrée d'une matrice symétrique positive)

On désigne par $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives) réelles de taille n. On rappelle les définitions respectives :

— $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq 0\}$
— $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle Ax, x\rangle > 0\}$

1. Montrer qu'une matrice est symétrique positive (resp définie positive) ssi elle a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$ (resp. dans $\mathbb{R}_+^*$).
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une "racine" à A, c'est à dire une matrice B telle que $B^2 = A$.
3. On suppose maintenant $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la racine B de A est unique.

Solution

Arguments à ne pas oublier : les valeurs propres sont bien réelles (théorème spectral!! ou en tout cas un des lemmes le précédant),

Exercice 8 (Norme d'une matrice symétrique)

Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On définit, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

On pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma_p(A)\}$ le rayon spectral où σ_p est le spectre de A.

1. Justifier rapidement que la quantité $|||A|||$ est bien définie pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|||A||| = \rho(A)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer que $|||A|||^2 = \rho({}^tAA)$. En déduire que $|||A|||^2 = |||{}^tAA|||$

Solution

1. Dim finie.
2. L'inégalité $|||\,|||\leq \rho$ est facile en calculant $\langle Ax, Ax\rangle$. On peut prendre une BON pour montrer que c'est bien atteint (en un lambda qui réalise le max du rayon).
3. De la même façon