Colles 2021-2022 S1 - Suites et séries

1 Questions de cours

Question de cours 1 (Comparaison série-intégrale)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ décroissante et $u_n = f(n)$. Alors $\sum u_n$ converge ssi $\int_0^{\infty} f$ converge.
Question subsidiaire : que dire dans le cas f croissante ?

Question de cours 2 (Règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive et non nulle à partir d'un certain rang. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$. Alors :
- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement

Question subsidiaire : trouver deux exemples de nature différente dans le cas $l = 1$.

Question de cours 3 (Critère de Riemann)

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Question de cours 4 (Critère des séries alternées)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite alternée telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0. Alors :
- $\sum u_n$ converge
- La somme S est comprise entre deux termes consécutifs de la somme partielle S_n.
- $|R_n| \leq |u_{n+1}|$
- S est du signe de u_0.

2 Exercices

Exercice 1

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 2

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
2. (a) On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge mais que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ diverge.
   (b) Montrer que $u_n \sim v_n$. Que peut-on en conclure ?

Solution

1. On effectue un développement limité (et non un équivalent !!). On obtient
$$\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
d'où la convergence via le critère des séries alternées.
2. (a) La convergence vient du critère des séries alternées. La divergence vient du fait que l'on somme une série convergente et une série divergente (harmonique)
   (b) On ne peut pas se contenter d'un équivalent lorsque les termes ne sont pas de signe constant !

Exercice 3 (Dunod MPSI - 14.15)

Soit $\alpha > 1$. Déterminer, en fonction de α, la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

En déduire un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Solution

On compare à l'intégrale et on trouve que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Donc on a convergence ssi $\alpha > 2$.

Exercice 4 (Dunod MPSI - 14.2 + bonus)

Convergence et sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n}$
2. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$
3. $\sum_{n\geq 2} (3+(-1)^n)^{-n}$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, on pourra utiliser $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$

Solution

1. On écrit la DES $\dfrac{1}{n(n-1)(n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2(n-1)} + \dfrac{1}{2(n+1)}$. On calcule ensuite explicitement la somme partielle $S_N = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2N(N+1)}$.
   On trouve $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{4}$.
2. On factorise $n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$ et $n^2+3n = n(n+3)$ puis on calcule explicitement la somme partielle :
$$S_N = \ln(N+1) - \ln(N+3) + \ln(3).$$
   On trouve $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) = \ln(3)$.
3. On sépare termes pairs et impairs et on calcule explicitement la somme partielle :
$$S_{2N+1} = \sum_{0}^{N} \frac{1}{16^k} + \frac{1}{2}\sum_{0}^{N-1} \frac{1}{4^k}.$$
   On trouve $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (3+(-1)^n)^{-n} = \frac{26}{15}$.
4. On sépare les termes pairs et impairs et on fait un DL de la somme partielle :
$$S_{2N+1} = H_N - H_{2N+1} = \ln(\frac{N}{2N+1}) + o(1).$$
   On trouve $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Exercice 5

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(n)$ et équivalent de la somme partielle.

Solution

On compare à l'intégrale associée. On trouve $n\ln(n)$.

Exercice 6 (Dunod MPSI - 14.6)

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Solution

On fait un DL. On a convergence ssi $(a,b) = (-2,1)$.

Exercice 7 (OdlT 2017 - 77 (ESPCI))

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante. Montrer que $\sum u_n$ converge ssi : $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge.
Question subsidiaire : suffit-il d'avoir $u_n = o(1/n)$? (c.f exo suivant)

Solution

$\Longleftarrow$ Si $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge :
On considère la suite $v_n = n(u_n - u_{n+1})$, qui par hypothèse est le terme général d'une série convergente. On remarque que cette suite est positive, et on a

$$v_n = nu_n - (n+1)u_{n+1} + u_{n+1}.$$

On est alors amenés à considérer $w_n := nu_n - (n+1)u_{n+1}$. On a $v_n = w_n + u_{n+1}$ d'une part, et d'autre part la série de terme général w_n est télescopique convergente par hypothèse sur v_n :

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = 0.u_0 - (n+1)u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Finalement, on a en sommant la relation $v_n = w_n + u_{n+1}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (v_k - w_k)$$

et donc la série $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes et donc converge.
$\Longrightarrow$ Si $\sum u_n$ converge :
On reprend les notations précédentes. Montrons que $\sum v_n$ converge et que $\sum w_n$ converge (ce qui montrera $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$).
On remarque que $\sum_{k=0}^{n} w_k = -(n+1)u_{n+1} \leq 0$. De plus $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc si $\sum_{k=0}^{n} v_k$ diverge, $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = +\infty$ ce qui contredit la relation $\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$ car ici on suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$. Donc nécessairement, $\sum_{k=0}^{n} v_k$ converge. Donc par somme comme dans le sens réciproque, $\sum_{k=0}^{n} w_k$ converge aussi et en particulier, d'après le résultat sur les séries télescopiques, $nu_n \to 0$ et donc $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Pour la question subsidiaire : non, c.f séries de Bertrand...

Exercice 8 (Séries de Bertrand)

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a(\ln(n))^b}$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Discuter de la nature de cette série suivant les paramètres a et b.
Application : donner une série à termes positifs $\sum u_n$ qui diverge mais qui vérifie $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (le critère de Bertrand est un raffinement du critère de Riemann).

Solution

On distingue tout d'abord les cas selon a.

1. Si $a > 1$: Alors par critère de Riemann, $\dfrac{1}{n^a(\ln(n))^b} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ si $b < 0$ et $\dfrac{1}{n^a(\ln(n))^b} =\leq \left(\dfrac{1}{n}\right)$ à partir du rang 3 si $b \geq 0$.
2. Si $a < 1$: On a $nu_n = \dfrac{n^{1-a}}{\ln(n)^b} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ d'où une divergence grossière (car $1 - a > 0$).
3. Si $a = 1$: on compare à l'intégrale $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{t(\ln(t))^b} dt$
   (a) Si $b \neq 1$, la primitive de l'intégrande est $t \mapsto \dfrac{(\ln(t))^{1-b}}{1-b}$. On en déduit par comparaison pour les séries à termes positifs que la série diverge dans le cas $b < 1$ et converge dans le cas $b > 1$
   (b) Si $b = 1$, la primitive est $\ln(\ln)$ et donc il y a divergence. C'est le cas limite.

Exercice 9 (Suites récurrentes et séries)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $x_{n+1} = \sin(x_n)$.

1. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite. Indication : commencer par montrer qu'elle est décroissante.
2. Montrer que $\left(\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et en déduire un équivalent de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ a-t-on convergence de la série $\sum x_n^a$?

Solution

1. On reprend l'argument classique pour les suites récurrentes. On étudie $f - id$ qui se trouve être négative sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. On en déduit que la suite est décroissante.. Ensuite, f a un **unique point fixe** dans l'intervalle I qui est **stable** par f. On en déduit d'une part par décroissance + minoration (car I stable) que (x_n) converge, puis par point fixe que $x_n \to 0$.
2. On effectue un développement limité. On trouve $\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{1}{3} + o(1)$. On utilise ensuite l'équivalence des sommes partielles pour les séries à termes positifs qui divergent. On trouve $x_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n+1}}$.
3. Convergence ssi $a > 2$ (critère de Riemann).