Colles 2021-2022 S2 - Convexité et intégration

1 Questions de cours

Question de cours 1 (Inégalité des trois pentes)

Soit f une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour tous $x < y < z$ dans I,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Question de cours 2 (Caractérisation des fonctions convexes)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors f est convexe ssi pour tout $a \in I$, la fonction $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}$ est croissante.

Question de cours 3 (Convexité et tangentes)

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors $\mathscr{C}_f$ est entre ses cordes et ses tangentes :

$$\forall a \leq x \leq b \in I, f(a) + (x-a)f'(a) \leq f(x) \leq p(x-a) + f(a)$$

où $p := \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la corde reliant $f(a)$ à $f(b)$.

Question de cours 4 (Fonction puissance en zéro)

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^a} dt$ converge ssi $a < 1$.

Question de cours 5 (Fonction puissance à l'infini)

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ converge ssi $a > 1$.

Question de cours 6 (Théorème de comparaison par équivalence)

Soient f et g définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et continues par morceaux. Montrer que $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ sont de même nature.

2 Exercices

I est un intervalle d'intérieur non vide.

Exercice 1

Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq 0 \text{ et } \langle Ax, x\rangle 0 \iff x = 0\}$ est convexe (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 2

Soit $f : I \to f(I) =: J$ convexe strictement monotone.

1. Rappeler pourquoi f est bijective.
2. Discuter de la convexité ou concavité de f^{-1} selon la monotonie de f.

Exercice 3 (Fonctions log-convexe)

Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que si f est logarithmiquement convexe (i.e $\ln(f)$ est convexe) alors f est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que f est logarithmiquement convexe ssi $\forall \alpha > 0,\ f_\alpha : x \mapsto f(x)\alpha^x$ est convexe.

Exercice 4 (Hölder et Minkowski)

Soient $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{1\leq k\leq n}, (b_k)_{1\leq k\leq n}$ des réels positifs.

1. Montrer l'inégalité de Hölder : $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$.
2. Montrer l'inégalité de Minkowski : $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$. Indication : on pourra remarquer que $(a_k + b_k)^p = a_k(a_k + b_k)^{p-1} + b_k(a_k + b_k)^{p-1}$.

Exercice 5

Nature, et somme si convergence, de :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arcsin\frac{1}{t} dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+3x}} dt$

Exercice 6 (Gamma d'Euler)

1. Trouvez le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
3. Montrer que Γ est convexe.

Exercice 7 (Mines-Ponts 2018)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}} dt$.

1. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{sin(t)}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^x \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}} dt$ lorsque $x \to +\infty$.