

Colles 2021-2022 S20 - Equations différentielles

1 Questions de cours

Question de cours 1

Enoncé du théorème de Cauchy linéaire.

Question de cours 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de l'EDL $y' = Ay$? (énoncé et démonstration)

Question de cours 3 (Utilisation du wronskien)

On considère l'EDL scalaire du premier ordre $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. On suppose que l'on connaît une solution y_1 non identiquement nulle de cette équation. Trouver une autre solution à partir de y_1 et du wronskien associé l'équation.

On rappelle que si ϕ est une autre solution alors le wronskien $w(t)$ de y_1 et ϕ vérifie $w'(t) = -a(t)w(t)$.

2 Exercices

Exercice 1

On considère l'équation $4(1 - t^2)y'' - 4ty' + y = 0$ sur $I =]-1, 1[$.

1. Chercher les solutions développables en séries entières.
2. En déduire que toutes les solutions de cette équation sont développables en séries entières. Indication : on pourra exhiber deux solutions développables en séries entières linéairement indépendantes.

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $ty' - 2y = t^3$.

Exercice 3

$$\text{Résoudre } \begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$$

Exercice 4

$$\text{Résoudre } \begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

Exercice 5 (Lemme de Grönwall)

On se place sur un segment $I \subset \mathbb{R}$.

1. Soient $(y, a) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall t \in I, y(t) \leq K + \int_{t_0}^t y(s)a(s)ds$.

Montrer qu'alors $\forall t \in I, y(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$. Indication : on pourra étudier le quotient

$$\frac{K + \int_{t_0}^t y(s)a(s)ds}{\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)}$$

2. En déduire que si $(z, a) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ vérifient $\forall t \in I, y(t) \leq \int_{t_0}^t y(s)a(s)ds$ alors z est la fonction nulle.
3. En déduire une preuve de l'unicité de la solution au problème de Cauchy scalaire du premier ordre $y'(t) = a(t)y(t) + b(t), y(0) = y^0$ sur $\mathbb{R}$ où a et b sont continues à valeurs réelles.

Exercice 6

Soit $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ positive qui n'est pas identiquement nulle. On veut montrer que toutes les solutions de $y''(t) + p(t)y(t) = 0$ s'annulent (au moins en un point). On suppose par l'absurde qu'il existe une solution y qui ne s'annule jamais.

1. Montrer que y est de signe constant. On supposera dans la suite $y > 0$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_y$ de y est en dessous de sa tangente en a .
3. En déduire que $y'(a) = 0$. Conclure.

Exercice 7

On considère l'EDL scalaire d'ordre 2 $y''(t) + b(t)y(t) = 0$. Soit y une solution non identiquement nulle. On veut montrer que, sur tout segment, y n'a qu'un nombre fini de zéros. On procède par l'absurde en supposant qu'il existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$ contenant un nombre infini de zéros de y .

1. Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_n$ de zéros de y qui converge. On notera z la limite.
2. Montrer que z est toujours un zéro de y .
3. Montrer que $y'(z)$ est bien défini et que $y'(z) = 0$.
4. En déduire que $y \equiv 0$ et conclure.