

Colles 2021-2022 S21 - Intégrales à paramètre

1 Exercices

Exercice 1 (Gamma d'Euler)

1. On pose, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(t, x) := t^{x-1}e^{-t}$. Trouvez le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
2. (a) Montrer que $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(D)$ et donnez une expression de $\Gamma^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
(b) En déduire que pour tout $x \in D$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, puis en déduire une expression de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que Γ est convexe.
4. On fixe $x \in D$.
(a) Montrer : $\forall u \leq 0, \ln(1-u) \leq -u$.
(b) On considère $f_n(t) := t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{]0, n[}(t)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \Gamma(x)$.
(c) En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.
5. Montrer que $\forall x \in D, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Exercice 2 (Transformée de Fourier de la gaussienne)

Le but de l'exercice est de calculer $F(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}e^{-x^2}dx$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On note $f(x, \xi) = e^{-ix\xi}e^{-x^2}$ l'intégrande.

1. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée. On justifiera soigneusement les calculs.
2. En déduire une équation différentielle vérifiée par F , puis une expression explicite de F . On pourra librement utiliser le résultat $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3 (Continuité des translations dans L^p)

On se place sur $E \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact, c'est à dire que f est dans E ssi elle est continue et il existe un compact tel que f soit nulle en dehors de ce compact. On le munit de la norme définie par $\|f\|_p^p := \int_{\mathbb{R}} |f|^p$.

Pour $h > 0$ on considère l'application $\tau_h : f \mapsto f(\cdot - h)$.

1. Justifier que $\|\cdot\|_p$ est bien définie sur E . On ne demande pas de montrer que c'est une norme.
2. Montrer que $\forall f \in E, \lim_{h \rightarrow 0} \tau_h f \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$.
3. On suppose que E est un sous-espace normé d'un plus grand espace $(F, \|\cdot\|_p)$. On suppose que E est dense dans F . Montrer que la proposition précédente reste vraie sur F .

Exercice 4 (Convolution et approximations de l'unité)

On notera $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. On rappelle que le support d'une fonction est $\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$. On notera L^1 l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$.

On définit le produit de convolution de deux fonctions de L^1 par

$$f \star g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

1. Soient $f, g \in L^1$. Montrer que $f \star g$ est bien défini et intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in L^1$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $f \star \rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
3. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ positive telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ et $\text{supp}(\rho) = [-1, 1]$. Montrer que la suite de terme général ρ_n défini par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ vérifie :

$$\forall f \in L^1, \forall x \in \mathbb{R}, f \star \rho_n(x) \rightarrow f(0)$$

Point culture : on appelle la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. En fait, sa "limite" n'est pas une fonction mais une distribution (Dirac), et c'est le seul moyen de créer une "unité" pour la convolution $\star$.

Exercice 5

On considère, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une expression simplifiée de F' et en déduire une expression simplifiée de F .

Exercice 6

Justifier l'intégrabilité et calculer la limite de $\int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx$.

Exercice 7

Justifier l'intégrabilité et calculer la limite de $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right) (1 - \tanh(x^n)) dx$.

Exercice 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt$ et montrer que $I_n = H_n - \ln(n)$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est la somme partielle de la série harmonique.
- 2.