Colles 2021-2022 S21 - Intégrales à paramètre

1 Exercices

Exercice 1 (Gamma d'Euler)

1. On pose, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(t,x) := t^{x-1}e^{-t}$. Trouvez le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
2. (a) Montrer que $\Gamma \in \mathcal{C}\infty(D)$ et donnez une expression de $\Gamma^{(k)}$ pour tout $\in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in D$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, puis en déduire une expression de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que Γ est convexe.
4. On fixe $x \in D$.
   (a) Montrer : $\forall u \leq 0$, $\ln(1-u) \leq -u$.
   (b) On considère $f_n(t) := t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{]0,n[}(t)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \Gamma(x)$.
   (c) En déduire que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.
5. Montrer que $\forall x \in D$, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

Exercice 2 (Transformée de Fourier de la gaussienne)

Le but de l'exercice est de calculer $F(\xi) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}e^{-x^2}dx$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On note $f(x,\xi) = e^{-ix\xi}e^{-x^2}$ l'intégrande.

1. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée. On justifiera soigneusement les calculs.
2. En déduire une équation différentielle vérifiée par F, puis une expression explicite de F. On pourra librement utiliser le résultat $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3 (Continuité des translations dans L^p)

On se place sur $E \subset \mathcal{C}0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact, c'est à dire que f est dans E ssi elle est continue et il existe un compact telle que f soit nulle en dehors de ce compact. On le munit de la norme définie par $\|f\|_p^p := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^p$.
Pour $h > 0$ on considère l'application $\tau_h : f \mapsto f(\cdot - h)$.

1. Justifier que $\|\cdot\|_p$ est bien définie sur E. On ne demande pas de montrer que c'est une norme.
2. Montrer que $\forall f \in E$, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \tau_h f \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$.
3. On suppose que E est un sous-espace normé d'un plus grand espace $(F, \|\cdot\|_p)$. On suppose que E est dense dans F. Montrer que la proposition précédente reste vraie sur F.

Solution

On fait un TCD sur $\tau_h f - f$ qui est majorée ponctuellement par $2\|f\|_\infty$. Pour la densité on prend une suite $f_n \in E$ qui tend vers $f \in F$ en norme p. On a $\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h f - \tau_h f_n\|_p + \|\tau_h f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p$ et on me rédige une jolie double limite (en h et en n) comme il faut. Allez hop hop je veux voir les epsilon

Exercice 4 (Convolution et approximations de l'unité)

On notera $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}\infty$ à support compact. On rappelle que le support d'une fonction est $\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$. On notera L^1 l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$.
On définit le produit de convolution de deux fonctions de L^1 par

$$f \star g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

1. Soient $f, g \in L^1$. Montrer que $f \star g$ est bien défini et intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in L^1$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $f \star g \in \mathcal{C}\infty(\mathbb{R})$.
3. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ positive telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ et $\text{supp}(\rho) = [-1, 1]$. Montrer que la suite de terme général ρ_n défini par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ vérifie :

$$\forall f \in L^1, \forall x \in \mathbb{R}, f \star \rho_n(x) \to f(0)$$

Point culture : on appelle la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. En fait, sa "limite" n'est pas une fonction mais une distribution (Dirac), et c'est le seul moyen de créer une "unité" pour la convolution $\star$.

Exercice 5

On considère, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est bien définie et $\mathcal{C}1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une expression simplifiée de F' et en déduire une expression simplifiée de F.

Solution

$F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 6

Justifier l'intégrabilité et calculer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n} dx$.

Exercice 7

Justifier l'intégrabilité et calculer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)(1 - \tanh(x^n))dx$.

Exercice 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)dt$ et montrer que $I_n = H_n - \ln(n)$ où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est la somme partielle de la série harmonique.
2.

Solution

$u = 1 - t/n$