# Colles 2021-2022 S2 - Convexité et intégration

## 1 Questions de cours

**Question de cours 1 (Inégalité des trois pentes)**

Soit $f$ une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour tous $x < y < z$ dans $I$,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

**Solution**

L'idée est d'exprimer le point du milieu $y$ comme un barycentre de $x$ et de $z$, c'est à dire trouver un $t \in [0,1]$ tel que $y = tx + (1-t)z$. En factorisant par $t$ on voit que cela revient à demander $t(x-z) = y - z$. On pose donc $t := \dfrac{y-z}{x-z}$, et on a bien $y = tx + (1-t)z$. (c'est légitime car $x \neq z$).
A partir de là, on peut appliquer la définition de "$f$ convexe" :

$$f(y) = f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z).$$

On obtient donc $f(y) - f(x) = (1-t)(f(x) - f(z))$, or $1 - t = \dfrac{x-z-(y-z)}{x-z} = \dfrac{x-y}{x-z}$ et la première inégalité est démontrée.
Pour l'inégalité de droite, on écrit $f(z) - f(y) = f(z) - (f(tx + (1-t)z)) \geq f(z) - tf(x) + (1-t)f(z)$ et on factorise à nouveau par $t$ pour conclure.

**Question de cours 2 (Caractérisation des fonctions convexes)**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors $f$ est convexe ssi pour tout $a \in I$, la fonction $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}$ est croissante.

**Solution**

On utilise l'inégalité des trois pentes. La croissance de $\varphi_a$ à $a$ fixé s'exprime comme une des inégalités des trois pentes et il faut alors séparer les cas selon la position des variables $x$ et $y$ selon $a$ : le cas $x \leq a \leq y$, le cas $a \leq x \leq y$ et le cas $x \leq y \leq a$. On vérifie que l'inégalité des trois pentes donne bien que $\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y)$ dans chaque cas.

**Question de cours 3 (Convexité et tangentes)**

Soit $f$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors $\mathscr{C}_f$ est entre ses cordes et ses tangentes :

$$\forall a \leq x \leq b \in I, f(a) + (x-a)f'(a) \leq f(x) \leq p(x-a) + f(a)$$

où $p := \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la corde reliant $f(a)$ à $f(b)$.

**Question de cours 4 (Fonction puissance en zéro)**

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^a} dt$ converge ssi $a < 1$.

**Question de cours 5 (Fonction puissance à l'infini)**

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ converge ssi $a > 1$.

**Question de cours 6 (Théorème de comparaison par équivalence)**

Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et continues par morceaux. Montrer que $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ sont de même nature.

## 2 Exercices

$I$ est un intervalle d'intérieur non vide.

**Exercice 1**

Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq 0 \text{ et } \langle Ax, x\rangle 0 \iff x = 0\}$ est convexe (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

**Solution**

On applique la définition, et on distingue suivant les valeurs de $t$.

**Exercice 2**

Soit $f : I \to f(I) =: J$ convexe strictement monotone.

1. Rappeler pourquoi $f$ est bijective.
2. Discuter de la convexité ou concavité de $f^{-1}$ selon la monotonie de $f$.

**Solution**

1. $f$ est convexe donc continue, et elle est strictement monotone sur l'intervalle $I$, donc injective (et la surjectivité est donnée car $J = f(I)$.

2. Si $f$ est croissante, $f^{-1}$ est décroissante et vice-versa. Il faut écrire l'inégalité de convexité et appliquer $f^{-1}$ en se souvenant que les fonctions réciproques ont même monotonie.

**Exercice 3 (Fonctions log-convexe)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que si $f$ est logarithmiquement convexe (i.e $\ln(f)$ est convexe) alors $f$ est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $f$ est logarithmiquement convexe ssi $\forall \alpha > 0,\ f_\alpha : x \mapsto f(x)\alpha^x$ est convexe.

**Solution**

1. Il suffit d'invoquer la convexité de exp (et savoir la redémontrer). Contre-exemple : $id$ n'est pas log-convexe.

2. Pour le sens direct, on remarque que $\ln(f_\alpha) = \ln(f) + \ln(\alpha) id$ est convexe et on conclut par la question précédente. Pour le sens indirect, en passant l'inégalité de convexité à l'exponentielle on voit qu'il est équivalent de montrer que

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t \times f(y)^{1-t}.$$

On sait déjà que pour tout $\alpha > 0$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{tf(x)\alpha^x + (1-t)f(y)\alpha^y}{\alpha^{tx+(1-t)y}} = tf(x)\alpha^{(1-t)(x-y)} + (1-t)f(y)\alpha^{t(y-x)}.$$

L'idée est de trouver le bon $\alpha$. Plus précisément, on cherche $\alpha$ tel que

$$\alpha^{(1-t)(x-y)} = f(y)^{1-t}f(x)^{t-1} \text{ et } \alpha^{t(y-x)} = f(y)^{-t}f(x)^t$$

Si $x = y$ l'inégalité est triviale, et sinon on pose $\alpha := \left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x-y}}$. On obtient ainsi les égalités voulues et donc

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x)^t f(y)^{1-t} + (1-t)f(x)^t f(y)^{1-t}$$

**Exercice 4 (Hölder et Minkowski)**

Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{1\leq k\leq n}, (b_k)_{1\leq k\leq n}$ des réels positifs.

1. Montrer l'inégalité de Hölder : $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$.
2. Montrer l'inégalité de Minkowski : $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$. Indication : on pourra remarquer que $(a_k + b_k)^p = a_k(a_k + b_k)^{p-1} + b_k(a_k + b_k)^{p-1}$.

**Solution**

1. Si tous les $b_k$ sont nuls, l'inégalité est triviale. Sinon, on peut applique l'inégalité de Jensen à la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^p \in \mathbb{R}$ en posant $\alpha := \sum_{k=1}^{n} b_k^q > 0$. L'idée est de choisir un poids $\lambda_k := \dfrac{b_k^q}{\alpha}$ de manière à avoir $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. On a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \times a_k b_k^{\beta}\right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \times a_k^p b_k^{p\beta}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ sera à choisir par la suite pour arriver à l'inégalité voulue. On poursuit le calcul :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k^{q+\beta} \leq \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \times a_k^p b_k^{p\beta}\right)^{1/p} = \alpha^{1-1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p b_k^{p\beta+q}\right)^{1/p}$$

A ce stade, on souhaiterait pouvoir choisir $\beta$ tel que $q+\beta = 1$ et $p\beta + q = 0$. C'est possible en considérant $\beta = 1-q$ car $p(1-q)+q = p - pq + q = p - (p+q) + q = 0$ à l'aide de l'hypothèse sur $p$ et $q$. On a alors l'inégalité de Hölder.

2. On applique l'inégalité de Hölder au produit $a_k(a_k+b_k)^{p-1}$ :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Or $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$ donc $\dfrac{1}{q} = \dfrac{p}{p-1}$ et $(a_k+b_k)^{(p-1)q} = (a_k+b_k)^p$.
De même en appliquant cette-fois ci l'inégalité de Hölder à $a_k(a_k+b_k)^{p-1}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

D'après la relation $(a_k+b_k)^p = a_k(a_k+b_k)^{p-1} + b_k(a_k+b_k)^{p-1}$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}\right] \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

On en déduit l'inégalité de Minkowski en remarquant que $1 - \dfrac{p}{p-1} = \dfrac{1}{p}$. (attention au cas nul, même s'il est trivial)

**Exercice 5**

Nature, et somme si convergence, de :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arcsin\frac{1}{t} dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+3x}} dt$

**Solution**

1. En $+\infty$, on peut invoquer l'intégrale de référence $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}$ et un équivalent. On calcule ensuite une primitive explicite par IPP :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^2}\ln(t)dt &= \left[\frac{1}{2}\frac{-1}{1+t^2}\ln(t)\right]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{-1}{t(t^2+1)}dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln(x) + \frac{1}{2}\left(\int_1^x \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{\ln(2)}{4} \\
&\underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\ln(2)}{4}
\end{aligned}$$

2. On rappelle $\arcsin u \underset{u\to 0}{=} u + \dfrac{u^3}{6} + o(u^4)$. Avec ceci on voit que l'intégrande vérifie $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ d'où l'intégrabilité.
Pour le calcul de l'intégale, on effectue une IPP sur la seconde intégrale :

$$\int_1^x \arcsin\frac{1}{t}dt = \left[t\arcsin\frac{1}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt = x\arcsin\frac{1}{x} - \arcsin 1 - \ln(t+\sqrt{t^2-1})$$

d'où $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t} - \arcsin\frac{1}{t}dt = x\arcsin\frac{1}{x} - \arcsin 1 - \ln(1+\frac{\sqrt{t^2-1})}{t}$.
Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} - \arcsin\frac{1}{t}dt = \frac{\pi}{2} - 1 - \ln(2).$$

3. Pour l'intégrabilité en 1, on utilise un équivalent et le critère de Riemann (décalé en 1).
On calcule la forme canonique du dénominateur :

$$(1-x)(1+3x) = -x^2+2x+1 = -3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{9}\right]$$

puis on calcule l'intégrale en changeant de variable en cours de route :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+3x}}dt &= \int_{-1/3}^{2/3} \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}-u^2}}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arcsin v\right]_{-1/2}^{1} \\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

**Exercice 6 (Gamma d'Euler)**

1. Trouvez le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
3. Montrer que $\Gamma$ est convexe.

**Solution**

1. On compare à l'infini à $e^{-t}$, par exemple en écrivant $t^{x-1}e^{-t} = O(e^{-t/2})$ (par croissances comparées ; on remarque que cela fonctionne pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$).
En 0, on compare à $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ par exemple par majoration directe $|t^{x-1}e^{-t}| \leq t^{x-1}$ : OK si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Pour la récurrence, il faut justifier l'IPP correctement (aide à donner : faire d'abord pour l'intégrale sur $[a,b] \subset [0,+\infty[$.)
Pour l'initialisation, on vérifie simplement que $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1 = 1!$ et $\Gamma(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 0 + \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 2!$ (encore une IPP à justifier).
3. On utilise la convexité de l'exponentielle pour montrer que

$$\forall t > 0, \forall x > 0, t^{sx+(1-s)y-1}e^{-t} \leq (st^x + (1-s)t^y)\, t^{-1}e^{-t}$$

puis on intègre (sur un intervalle fini d'abord si on veut).

**Exercice 7 (Mines-Ponts 2018)**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}}dt$.

1. Déterminer un équivalent simple de $I_n$ lorsque $n \to +\infty$.
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{sin(t)}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ?
3. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^x \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}}dt$ lorsque $x \to +\infty$.

**Solution**

1. L'astuce est de comparer "partiellement" à une intégrale, plus précisément :

$$\forall t \in [n\pi,(n+1)\pi],\ \frac{|sin(t)|}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}} \leq \frac{|sin(t)|}{\sqrt{n}}.$$

De ceci, on déduit en intégrant que $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|sin(t)|}{\sqrt{n}}dt = 2\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

2. On remarque que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}}dt \geq \int_0^{N\pi} \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}}dt = \sum_{k=0}^{N} I_k$. Par critère de Riemann, la série à droite diverge, d'où la non-intégrabilité.

3. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et notons $N(x) = N := \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$. On a

$$I_{\pi x} = \sum_{k=0}^{N} I_k + \int_{N\pi}^{\pi x} \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}}dt.$$

Par comparaison des sommes partielles de séries divergentes à termes positifs, le premier terme est équivalent à $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Par comparaison série-intégrale ($t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4\sqrt{x}}{\pi}$ car $N(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x}{\pi}$.
D'autre part, le second terme est négligeable par rapport au premier. En effet :

$$0 \leq \int_{\pi\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor}^{x} \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}}dt \leq \int_{\pi\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor}^{x} \frac{1}{\sqrt{t}}dt.$$

La dernière intégrale vaut :

$$\left[2\sqrt{t}\right]_{\pi\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor}^{x} = 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{\pi\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor}\right).$$

Or on remarque que $\sqrt{x-\pi} \leq \pi\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \leq \sqrt{x}$. On peut donc majorer la quantité précédente :

$$2\left(\sqrt{x} - \sqrt{\pi\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor}\right) \leq 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-\pi}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 2\sqrt{x}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

d'où finalement :

$$\int_0^x \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}}dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{4\sqrt{x}}{\pi}.$$