Colles 2021-2022 S3 - Intégration

1 Questions de cours

Question de cours 1 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On suppose que :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I (on note f sa limite)
2. Il existe $g \in L^1(I) \cap \mathcal{C}^0_{pm}(I)$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leq g(x)$

Alors

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I.
2. f est intégrable sur I.
3. $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \lim\limits_{n\to\infty} f(x)dx = \int_I f(x)dx$.

Question de cours 2 (Théorème d'intégration terme à terme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx$$

2 Exercices

Exercice 1

Nature, et somme si convergence, de :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arcsin\frac{1}{t}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+3x}}dt$

Exercice 2 (Gamma d'Euler)

1. Trouvez le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
3. Montrer que Γ est convexe.

Exercice 3 (Mines-Ponts 2018)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}} dt$.

1. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{sin(t)}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^x \frac{|sin(t)|}{\sqrt{t}} dt$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 4

Montrer la convergence et déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-2x} dx$$

.

Exercice 5

Montrer la convergence et déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right) (1 - \tanh x^n) dx$$

.

Exercice 6

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 7

Montrer que :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

Exercice 8

En utilisant le théorème de convergence dominée sur $f_{n,x} : t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}$, montrer que

$$\forall x > 0, \, \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^x n!}{\prod_{k=0}^{n} (k + x)}$$