Colles 2021-2022 S3 - Intégration

1 Questions de cours

Question de cours 1 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On suppose que :

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I (on note f sa limite)
2. Il existe $g \in L^1(I) \cap C_{pm}^0(I)$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq g(x)$

Alors

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable sur I .
2. f est intégrable sur I .
3. $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) dx = \int_I f(x) dx$.

Question de cours 2 (Théorème d'intégration terme à terme)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx$$

2 Exercices

Exercice 1

Nature, et somme si convergence, de :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arcsin \frac{1}{t} dt$
3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+3x}} dt$

Solution

1. En $+\infty$, on peut invoquer l'intégrale de référence $\int \frac{1}{t^2}$ et un équivalent. On calcule ensuite une primitive explicite par IPP :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^2} \ln(t) dt &= \left[\frac{1}{2} \frac{-1}{1+tp^2} \ln(t) \right]_1^x - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{-1}{t(t^2+1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \ln(x) + \frac{1}{2} \left(\int_1^x \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + \frac{\ln(2)}{4} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{4} \end{aligned}$$

2. On rappelle $\arcsin u \underset{u \rightarrow 0}{=} u + \frac{u^3}{6} + o(u^4)$. Avec ceci on voit que l'intégrande vérifie $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ d'où l'intégrabilité.

Pour le calcul de l'intégrale, on effectue une IPP sur la seconde intégrale :

$$\int_1^x \arcsin \frac{1}{t} dt = \left[t \arcsin \frac{1}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt = x \arcsin \frac{1}{x} - \arcsin 1 - \ln(t + \sqrt{t^2-1})$$

d'où $\int_0^x \frac{1}{t} - \arcsin \frac{1}{t} dt = x \arcsin \frac{1}{x} - \arcsin 1 - \ln\left(1 + \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)$.

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} - \arcsin \frac{1}{t} dt = \frac{\pi}{2} - 1 - \ln(2).$$

3. Pour l'intégrabilité en 1, on utilise un équivalent et le critère de Riemann (décalé en 1).

On calcule la forme canonique du dénominateur :

$$(1-x)(1+3x) = -x^2 + 2x + 1 = -3 \left[\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9} \right]$$

puis on calcule l'intégrale en changeant de variable en cours de route :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+3x}} dt &= \int_{-1/3}^{2/3} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9} - u^2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\arcsin v]_{-1/2}^1 \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Exercice 2 (Gamma d'Euler)

1. Trouvez le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.
3. Montrer que Γ est convexe.

Solution

1. On compare à l'infini à e^{-t} , par exemple en écrivant $t^{x-1}e^{-t} = O(e^{-t/2})$ (par croissances comparées ; on remarque que cela fonctionne pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$).

En 0, on compare à $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ par exemple par majoration directe $|t^{x-1}e^{-t}| \leq t^{x-1}$: OK si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Pour la récurrence, il faut justifier l'IPP correctement (aide à donner : faire d'abord pour l'intégrale sur $[a, b] \subset [0, +\infty[$.)

Pour l'initialisation, on vérifie simplement que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 1!$ et $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt =$

$0 + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 2!$ (encore une IPP à justifier).

3. On utilise la convexité de l'exponentielle pour montrer que

$$\forall t > 0, \forall x > 0, t^{sx+(1-s)y-1}e^{-t} \leq (st^x + (1-s)t^y)t^{-1}e^{-t}$$

puis on intègre (sur un intervalle fini d'abord si on veut).

Exercice 3 (Mines-Ponts 2018)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} dt$.

1. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

3. Déterminer un équivalent de $\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} dt$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Solution

1. L'astuce est de comparer "partiellement" à une intégrale, plus précisément :

$$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} \leq \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{n}}.$$

De ceci, on déduit en intégrant que $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{n}} dt = 2 \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

2. On remarque que $\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} dt \geq \int_0^{N\pi} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} dt = \sum_{k=0}^N I_k$. Par critère de Riemann, la série à droite diverge, d'où la non-intégrabilité.

3. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et notons $N(x) = N := \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$. On a

$$I_{\pi x} = \sum_{k=0}^N I_k + \int_{N\pi}^{\pi x} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} dt.$$

Par comparaison des sommes partielles de séries divergentes à termes positifs, le premier terme est équivalent à $\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}}$. Par comparaison série-intégrale ($t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), on trouve $\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4\sqrt{x}}{\pi}$ car $N(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{\pi}$.

D'autre part, le second terme est négligeable par rapport au premier. En effet :

$$0 \leq \int_{\pi \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor}^x \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} dt \leq \int_{\pi \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor}^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

La dernière intégrale vaut :

$$\left[2\sqrt{t} \right]_{\pi \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor}^x = 2 \left(\sqrt{x} - \sqrt{\pi \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor} \right).$$

Or on remarque que $\sqrt{x - \pi} \leq \pi \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor \leq \sqrt{x}$. On peut donc majorer la quantité précédente :

$$2 \left(\sqrt{x} - \sqrt{\pi \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor} \right) \leq 2 \left(\sqrt{x} - \sqrt{x - \pi} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{x} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

d'où finalement :

$$\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4\sqrt{x}}{\pi}.$$

Exercice 4

Montrer la convergence et déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-2x} dx$$

Solution

On applique le théorème de convergence dominée. Les hypothèses de continuité sont trivialement vérifiées (j'attends un argument de produit et de somme à l'oral). Pour la domination, on se sert de l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$ (inégalité de convexité + c'est la tangente en 0 ou étude de fonction). On trouve e^{-x} comme fonction de domination. C'est également la limite simple de l'intégrande. On trouve au final :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Exercice 5

Montrer la convergence et déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right) (1 - \tanh x^n) dx$$

Solution

Pour la domination, on peut dominer sur $]0, 1]$ par $1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et sur $]1, +\infty[$ par $2(1 - \tanh x)$ qui sont bien intégrables. Il faut se rappeler que $1 - \tanh x$ est intégrable en $+\infty$ (car $1 - \tanh x = \frac{2e^{-x}}{\cosh x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-x}$.)
 Pour la convergence simple, on trouve $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (1+0)(1-0) = 1$ pour $x \in]0, 1]$ et $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pour $x > 1$.
 On en déduit finalement par convergence dominée :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Exercice 6

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Solution

Pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme, on fait deux IPP sur le terme général de la série (qui se trouve être positif sur $[0, 1]$) :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |t^n \sin(\pi t)| dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \sin(\pi t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \pi \cos(\pi t) dt \\ &= 0 - \frac{\pi}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} \cos(\pi t) dt \\ &= \frac{\pi}{n+1} \left(\left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \cos(\pi t) \right]_0^1 + \frac{\pi}{n+2} \int_0^1 t^{n+2} \sin(\pi t) dt \right) \end{aligned}$$

On en déduit la convergence par bornitude (?) des fonctions trigonométriques et critère de Riemann pour les séries. On déduit le résultat par interversion somme-intégrale (modulo un ou deux petits changements de variables).

Exercice 7

Montrer que :

1. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$.
2. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

Solution

1. On a $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$. pour l'inversion, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \int_0^1 x^2 e^{-x} e^{-nx} \leq e^{-1} e^{-n} = 1 \times \|x \mapsto x^2 e^{-x} e^{-nx}\|_{\infty}^{[0,1]}$$

qui est bien le terme général d'une série géométrique convergente.

Pour le calcul, on a $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int e^{-(n+1)x} x^2$ que l'on calcule avec deux IPP.

Exercice 8

En utilisant le théorème de convergence dominée sur $f_{n,x} : t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}$, montrer que

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n n!}{\prod_{k=0}^n (k+x)}$$

Solution

On remarque que à $x > 0$ fixé, $(f_{n,x})_n$ converge simplement vers $f_x : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^{x-1} e^{-t}$. En appliquant le TCD avec la domination à $x > 0$ fixé $|f_{n,x}(t)| \leq |t^{x-1} e^{-t}|^a$ qui est intégrable, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f_{n,x}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x).$$

On effectue un changement de variable puis des IPP successives sur l'intégrale de gauche à n et x fixés. On obtient, en notant $I_k = \int_0^1 u^{x-1+(n-k)} (1-u)^k du$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{n,x}(t) dt &= \int_0^1 n^{x-1} u^{x-1} (1-u)^n n du \text{ avec } u = t/n \\ &= n^x I_n \\ &= n^x \left(0 - \int_0^1 \frac{u^x}{x} n (1-u)^{n-1} du \right) \\ &= n^x \frac{n}{x} I_{n-1} \\ &= n^x \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} I_{n-2} \\ &= n^x \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (k+x)} I_0 \text{ par récurrence.} \end{aligned}$$

où $I_0 = \int_0^1 u^{x-1+n} du = 1$. On a donc bien $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n n!}{\prod_{k=0}^n (k+x)}$.

a. par exemple par inégalité de convexité sur $\ln$