Colles 2021-2022 S4 - Algèbre linéaire

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Questions de cours

Question de cours 1 (Caractérisation des projecteurs)

Soit $p : E \to E$ une application linéaire, et $dim(E) < \infty$. Alors p est un projecteur (d'image $\mathrm{Im}(p)$ et de direction $\mathrm{Ker}(p)$) si et seulement si $p \circ p = p$.
Le cas échéant, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id)$ et $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - id)$.

Question de cours 2 (Caractérisation des symétries)

Soit $s : E \to E$ une application linéaire. Alors s est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - id_E)$ parallèlement $\mathrm{Ker}(s + id_E)$ si et seulement si $s \circ s = id_E$.
Le cas échéant, $E = \mathrm{Ker}(s - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + id_E)$.

Question de cours 3 (Exo d'application sur les morphismes d'algèbre)

Montrer que pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme d'algèbres.

2 Exercices

Exercice 1 (Banque CCP exo 64)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $dim(E) < \infty$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$
2. $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$
3. $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$

Exercice 2

Déterminer une base propre pour les matrices suivantes (voire diagonaliser dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ pour la 3, si définition connue) :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (Banque CCP exo 60)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathscr{L}(E) \mapsto AM$ où $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Trouver une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$

Exercice 4

Soit $L = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $A = L^t L$. Déterminer le rang, l'image, le noyau et les espaces propres de A.

Exercice 5 (Décalage à droite)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $D : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de D.

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $f : P \in E \mapsto X(P' + P'(0)) - 2(P - P(0))$. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{C}0([0,1], \mathbb{R})$. On pose $u(f)(x) := \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t) dt$ pour tous $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ et que $\forall f \in E$, $u(f) \in \mathcal{C}2$ et $[u(f)]'' = -f$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Exercice 8

Soit E de dimension finie. Déterminer les endormorphismes de E laissant tous les hyperplans stables.