Colles 2021-2022 S4 - Algèbre linéaire

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Questions de cours

Question de cours 1 (Caractérisation des projecteurs)

Soit $p : E \to E$ une application linéaire, et $dim(E) < \infty$. Alors p est un projecteur (d'image $\mathrm{Im}(p)$ et de direction $\mathrm{Ker}(p)$) si et seulement si $p \circ p = p$.
Le cas échéant, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id)$ et $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - id)$.

Solution

Dans le sens direct, on voit que si $x = y + z \in \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, $p^2(x) = p(p(y + z)) = p(y) = y$.
Dans le sens indirect, on pose $F := \mathrm{Im}(p)$ et $G := \mathrm{Ker}(p)$. La première chose est de voir que les deux espaces sont en somme directe. Attention, on est en dimension quelconque : pas question d'utiliser le théorème du rang.
On a $G = \mathrm{Ker}(p - id)$ car $p(x) = x$ implique $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y = p(x)$ implique $p(y) - y = p(p(x)) - p(x) = 0$.
Donc en écrivant $x = y + z$ avec $y = p(x)$ et $z = x - p(x)$ on a bien une décomposition dans $F + G$.
D'autre part si $x \in F \cap G$ alors $p(x) - x = 0$ et $p(x) = 0$ donc $x = 0$. Autre réponse possible (et plus valorisée) : x est un vecteur dans deux espaces propres distincts, donc il est nul.

Question de cours 2 (Caractérisation des symétries)

Soit $s : E \to E$ une application linéaire. Alors s est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - id_E)$ parallèlement $\mathrm{Ker}(s + id_E)$ si et seulement si $s \circ s = id_E$.
Le cas échéant, $E = \mathrm{Ker}(s - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + id_E)$.

Solution

On pose $F := \mathrm{Ker}(s - id)$ et $G := \mathrm{Ker}(p + id)$.
Dans le sens direct, on voit que si $x = y + z \in F \oplus G$, $s^2(x) = s(s(y + z)) = s(y - z) = y - (-z) = y + z$.
Dans le sens indirect, la première chose est de voir que les deux espaces sont en somme directe. Attention, on est en dimension quelconque : pas question d'utiliser le théorème du rang.
D'une part, tout $x \in E$ s'écrit $x = \frac{1}{2}(x - s(x)) + \frac{1}{2}(x + s(x)) \in G + F$.
D'autre part si $x \in F \cap G$ alors $s(x) = x = -x = 0$. Autre réponse possible (et plus valorisée) : x est un vecteur dans deux espaces propres distincts, donc il est nul.

Question de cours 3 (Exo d'application sur les morphismes d'algèbre)

Montrer que pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme d'algèbres.

2 Exercices

Exercice 1 (Banque CCP exo 64)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $dim(E) < \infty$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$
2. $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$
3. $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$

Exercice 2

Déterminer une base propre pour les matrices suivantes (voire diagonaliser dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ pour la 3, si définition connue) :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

Solution

1. $\chi = (X+1)^2(X-1)$, $E_1 = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{-1} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \{x + y = z\}$
2. $\chi = (X-3)(X-6)(X-9)$, $E_3 = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_6 = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_9 = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $\chi = (X-2)(X+j)(X+j^2)$, $E_2 = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_6 = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_9 = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (Banque CCP exo 60)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathscr{L}(E) \mapsto AM$ où $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$

Exercice 4

Soit $L = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $A = L^tL$. Déterminer le rang, l'image, le noyau et les espaces propres de A.

Solution

On a $A = (a_i a_j)_{1\leq i,j\leq n}$. A est de rang 1, et la valeur propre restante est $\lambda = Tr(A) = \sum a_i^2 = \|L\|_2^2$, associée au vecteur propre L (il suffit de remarquer que $AX = L({}^tLX) = \langle L, X\rangle L$).
Les deux espaces propres, associés respectivement à 0 et λ, sont de dimension respectives $n-1$ et 1 d'après le théorème du rang. Plus précisément, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{vect}(L)$ et $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n) = \{\langle L, X\rangle = 0\} = L^\perp = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots, \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix}\right)$ en supposant par exemple que $a_1 \neq 0$.

Exercice 5 (Décalage à droite)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $D : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de D.

Solution

Les valeurs propres sont les réels et $E_\lambda = \{$ suites géométriques de raison $\lambda\} = \mathrm{vect}\,(n \mapsto \lambda^n)$ pour $\lambda \neq 0$ et $E_0 = \mathrm{vect}((1,0,0,\dots))$. (remarque : les deux définitions coïncident quand même pour lambda nul avec la convention $0^0 = 1$)

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $f : P \in E \mapsto X(P' + P'(0)) - 2(P - P(0))$. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f.

Solution

On trouve, en écrivant l'égalité $f(P) = \lambda P$ avec $P = \sum_k a_k X^k$, que $\lambda = k$ pour tout a_k non nul :

$$f(P) = \lambda P \Longleftrightarrow (2a_0 - (2+\lambda)a_0) + (a_0 + a_1 - (2+\lambda)a_1)X + \sum_{k=2}^{d} (ka_k - (2+\lambda)a_k)X^k = 0$$

ce qui n'est possible que si (i) : λ est égal à l'un des $k \in [\![0, d]\!]$ et que (ii) : les a_k sont nuls pour $k \neq \lambda$.
Les calculs précédents montrent donc que $\sigma(f) = \mathbb{N}$ avec par exemple $P = X^n$ comme vecteur propre pour $\lambda = n$. C'est en fait le seul (à constante près) par (ii). Donc l'espace propre associé à n est l'espace $E_n = \mathrm{vect}(X^n)$ des monômes de degré n.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{C}0([0,1], \mathbb{R})$. On pose $u(f)(x) := \int_0^1 \min(x,t) f(t)dt$ pour tous $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ et que $\forall f \in E$, $u(f) \in \mathcal{C}2$ et $[u(f)]'' = -f$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Solution

1. On remarque que pour $x \in [0,1]$, $u(f)(x) = \int_0^x tf(t) + x\int_x^1 f(t)dt$ définit d'après le théorème fondamental de l'analyse une fonction $\mathcal{C}1$ sur $[0,1]$ selon x, et $u(f)'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)dt + x(-f(x)) = \int_x^1 f(t)dt$. Par le même argument, $u(f) \in \mathcal{C}2$ et $[u(f)]^{''} = -f$.
2. On sépare les cas selon la valeur de λ.
   — Cas λ non nul. On voit que $u(f) = \lambda f$ implique $f \in \mathcal{C}2([0,1])$ et $-f = \lambda f^{''}$ et donc $f \in \text{vect}\left(x \mapsto e^{\frac{-1}{\lambda}x}\right)$.
   — Cas $\lambda = 0$. On voit que $u(f) = 0$ implique $f = 0$, donc 0 n'est pas valeur propre.

Exercice 8

Soit E de dimension finie. Déterminer les endormorphismes de E laissant tous les hyperplans stables.

Solution

Il y a plusieurs façons de procéder, et la plupart s'appuient sur le résultat suivant :
Si $(x, u(x))$ **est libre pour tout** $x \in E$ **alors** u **est une homothétie**. En effet il existe dans ce cas pour tout x un $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. En particulier si $x, y \in E \setminus \{0\}$, on a $u(\alpha x) = \alpha\lambda_x x = \lambda_{\alpha x}(\alpha x)$ et $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Le premier point montre que si (x, y) est liée alors $\lambda_x = \lambda_y$ et le second montre aussi cela dans le cas libre. D'où $x \mapsto \lambda_x$ constante et u homothétie.
Point de vue 1 : Par l'absurde : si $(x, u(x))$ est liée on peut la compléter en une base $(x, u(x), e_3, \dots, e_n)$ de E. Alors l'hyperplan H de base $(x, e_3, \dots, e_n)$ est stable par u par hypothèse, ce qui contredit le fait que par définition, $u(x) \notin H$. (car $(x, u(x), e_3, \dots, e_n)$, elle, est libre.)
Point de vue 2 : on constate que l'on peut écrire tout s.e.v de E de dimension p comme intersection de $n - p$ hyperplans "indépendants" (cela correspond à un système linéaire, ou encore à p formes linéaires indépendantes dans E^*). On voit donc qu'un tel endomorphisme stabilise tous les sev de E, et est donc nécessairement une homothétie (c.f lemme car alors u stabilise toutes les droites donc on a en effet $(x, u(x))$ est libre pour tout $x \in E$).