Colles 2021-2022 S5 - Algèbre linéaire 2

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Questions/exercices de cours

Question de cours 1 (Diagonalisabilité)

Donnez au moins 2 conditions, nécessaires et/ou suffisantes, de diagonalisabilité pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Donnez un exemple de matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Question de cours 2 (Dualité)

Donnez la définition de la base duale d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E.
En déduire la dimension de E^*.

Question de cours 3 (Convergence simple et uniforme)

Donner la définition de la convergence simple et de la convergence uniforme.
Trouver un exemple d'une suite de fonctions continues qui ne converge pas uniformément.

2 Exercices

Exercice 1

Déterminer une base propre pour les matrices suivantes (voire diagonaliser dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ pour la 3, si définition connue) :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $L = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $A = L^t L$. Déterminer le rang, l'image, le noyau et les espaces propres de A.

Exercice 3 (Décalage à droite)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $D : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de D.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $f : P \in E \mapsto X(P' + P'(0)) - 2(P - P(0))$. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f.

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}0([0,1],\mathbb{R})$. On pose $u(f)(x) := \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)dt$ pour tous $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ et que $\forall f \in E$, $u(f) \in \mathcal{C}2$ et $[u(f)]'' = -f$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Exercice 6

Soit E de dimension finie. Déterminer les endormorphismes de E laissant tous les hyperplans stables.

Exercice 7

Trouvez la base duale de $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 8

Etudier la diagonalisabilité de $A = a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. On pourra admettre que $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Exercice 10 (Convergence unforme et continuité)

Montrer qu'une suite de fonctions continues convergeant uniformément a sa limite continue.
Est-ce qu'une suite de fonctions continues convergeant simplement a sa limite continue ? Si non, trouver un contre-exemple.