

Colles 2021-2022 S5 - Algèbre linéaire 2

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Questions/exercices de cours

Question de cours 1 (Diagonalisabilité)

Donnez au moins 2 conditions, nécessaires et/ou suffisantes, de diagonalisabilité pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Donnez un exemple de matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Solution

Attendus : Base propre (CNS), polynôme caractéristique sars (CN), espaces propres en somme directe (CNS) (+ définition de la similitude). Polynôme minimal sars (CNS) pas attendu.

Exemple avec $\chi_A = X^2 + 1$: matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question de cours 2 (Dualité)

Donnez la définition de la base duale d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E .
En déduire la dimension de E^* .

Question de cours 3 (Convergence simple et uniforme)

Donner la définition de la convergence simple et de la convergence uniforme.
Trouver un exemple d'une suite de fonctions continues qui ne converge pas uniformément.

Solution

$x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.

2 Exercices

Exercice 1

Déterminer une base propre pour les matrices suivantes (voire diagonaliser dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ pour la 3, si définition connue) :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

Solution

1. $\chi = (X+1)^2(X-1)$, $E_1 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{-1} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \{x+y=z\}$

2. $\chi = (X-3)(X-6)(X-9)$, $E_3 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_6 = \text{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_9 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $\chi = (X-2)(X+j)(X+j^2)$, $E_2 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_6 = \text{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_9 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $L = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $A = L^t L$. Déterminer le rang, l'image, le noyau et les espaces propres de A .

Solution

On a $A = (a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. A est de rang 1, et la valeur propre restante est $\lambda = \text{Tr}(A) = \sum a_i^2 = \|L\|_2^2$, associée au vecteur propre L (il suffit de remarquer que $AX = L(^t LX) = \langle L, X \rangle L$).

Les deux espaces propres, associés respectivement à 0 et λ , sont de dimension respectives $n-1$ et 1 d'après le théorème du rang. Plus précisément, $\text{Ker}(A) = \text{vect}(L)$ et $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{\langle L, X \rangle = 0\} = L^\perp =$

$\text{vect} \left(\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} \right)$ en supposant par exemple que $a_1 \neq 0$.

Exercice 3 (Décalage à droite)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $D : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de D .

Solution

Les valeurs propres sont les réels et $E_\lambda = \{ \text{suites géométriques de raison } \lambda \} = \text{vect}(n \mapsto \lambda^n)$ pour $\lambda \neq 0$ et $E_0 = \text{vect}((1, 0, 0, \dots))$. (remarque : les deux définitions coïncident quand même pour $\lambda = 0$ avec la convention $0^0 = 1$)

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $f : P \in E \mapsto X(P' + P'(0)) - 2(P - P(0))$. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f .

Solution

On trouve, en écrivant l'égalité $f(P) = \lambda P$ avec $P = \sum_k a_k X^k$, que $\lambda = k$ pour tout a_k non nul :

$$f(P) = \lambda P \iff (2a_0 - (2 + \lambda)a_0) + (a_0 + a_1 - (2 + \lambda)a_1)X + \sum_{k=2}^d (ka_k - (2 + \lambda)a_k)X^k = 0$$

ce qui n'est possible que si (i) : λ est égal à l'un des $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ et que (ii) : les a_k sont nuls pour $k \neq \lambda$. Les calculs précédents montrent donc que $\sigma(f) = \mathbb{N}$ avec par exemple $P = X^n$ comme vecteur propre pour $\lambda = n$. C'est en fait le seul (à constante près) par (ii). Donc l'espace propre associé à n est l'espace $E_n = \text{vect}(X^n)$ des monômes de degré n .

Exercice 5

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $u(f)(x) := \int_0^1 \min(x, t)f(t)dt$ pour tous $f \in E$ et $x \in [0, 1]$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ et que $\forall f \in E$, $u(f) \in C^2$ et $[u(f)]'' = -f$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u .

Solution

1. On remarque que pour $x \in [0, 1]$, $u(f)(x) = \int_0^x tf(t)dt + x \int_x^1 f(t)dt$ définit d'après le théorème fondamental de l'analyse une fonction C^1 sur $[0, 1]$ selon x , et $u(f)'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)dt + x(-f(x)) = \int_x^1 f(t)dt$. Par le même argument, $u(f) \in C^2$ et $[u(f)]'' = -f$.
2. On sépare les cas selon la valeur de λ .
 - Cas λ non nul. On voit que $u(f) = \lambda f$ implique $f \in C^2([0, 1])$ et $-f = \lambda f''$ et donc $f \in \text{vect}\left(x \mapsto e^{\frac{-1}{\lambda}x}\right)$.
 - Cas $\lambda = 0$. On voit que $u(f) = 0$ implique $f = 0$, donc 0 n'est pas valeur propre.

Exercice 6

Soit E de dimension finie. Déterminer les endomorphismes de E laissant tous les hyperplans stables.

Solution

Il y a plusieurs façons de procéder, et la plupart s'appuient sur le résultat suivant :

Si $(x, u(x))$ est libre pour tout $x \in E$ alors u est une homothétie. En effet il existe dans ce cas pour tout x un $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. En particulier si $x, y \in E \setminus \{0\}$, on a $u(\alpha x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_{\alpha x}(\alpha x)$ et $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Le premier point montre que si (x, y) est liée alors $\lambda_x = \lambda_y$ et le second montre aussi cela dans le cas libre. D'où $x \mapsto \lambda_x$ constante et u homothétie.

Point de vue 1 : Par l'absurde : si $(x, u(x))$ est liée on peut la compléter en une base $(x, u(x), e_3, \dots, e_n)$ de E . Alors l'hyperplan H de base $(x, e_3, \dots, e_n)$ est stable par u par hypothèse, ce qui contredit le fait que par définition, $u(x) \notin H$. (car $(x, u(x), e_3, \dots, e_n)$, elle, est libre.)

Point de vue 2 : on constate que l'on peut écrire tout s.e.v de E de dimension p comme intersection de $n-p$ hyperplans "indépendants" (cela correspond à un système linéaire, ou encore à p formes linéaires indépendantes dans E^*). On voit donc qu'un tel endomorphisme stabilise tous les sev de E , et est donc nécessairement une homothétie (c.f lemme car alors u stabilise toutes les droites donc on a en effet $(x, u(x))$ est libre pour tout $x \in E$).

Exercice 7

Trouvez la base duale de $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Solution

On cherche $\mathcal{B}^* = (\phi_i)$ telle que $\phi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Cela revient à résoudre pour chaque $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ un système linéaire provenant de la condition $\phi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ pour $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Pour ϕ_1 on trouve le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où A est la matrice, la même pour les autres ϕ_i , composée des e_j en ligne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\mathcal{B}^*(e_1^* - e_2^* + e_3^*, e_2^* - e_3^*, -e_1^* + 2e_2^* - e_3^*)$.

Exercice 8

Etudier la diagonalisabilité de $A = a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution

La matrice est de rang 1 et de trace n . En particulier E_n n'est pas réduit à 0 et $\text{Ker}(A)$ est de dimension $n-1$. Donc A est diagonalisable.

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\text{rg}(A) = 1$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$. On pourra admettre que $\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Solution

On écrit A en colonnes. On voit que la famille est à 1 degré de liberté : $A = ((X)(c_1X) \dots (c_{n-1})X))$. On pose $L = (1, c_1, \dots, c_{n-1})$ (On peut faire cela quitte à inverser l'ordre des vecteurs dans A et en prenant $X =$ un vecteur non nul colonne de A i.e un vecteur non nul de l'image de la base canonique par A).

Dans le sens réciproque, on voit bien que A est de rang 1.

Pour la diagonalisabilité, on voit que c'est comme pour l'exercice précédent : si $\text{Tr}(A) \neq 0$ alors il y a une valeur propre non nulle, et on sait que la valeur propre nulle a pour multiplicité géométrique $n - 1$, donc A est diagonalisable, et réciproquement.

Exercice 10 (Convergence uniforme et continuité)

Montrer qu'une suite de fonctions continues convergeant uniformément a sa limite continue.

Est-ce qu'une suite de fonctions continues convergeant simplement a sa limite continue? Si non, trouver un contre-exemple.

Solution

Trois espilons à sortir (et fixer le n_0).

$x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.