

Colles 2021-2022 S6 - Suites de fonctions

CVS = convergence simple, CVU = convergence uniforme

1 Questions de cours

Question de cours 1

Énoncé et démonstration du théorème d'intégration de suites de fonctions qui CVU sur un segment.

Question de cours 2

Énoncé du théorème de dérivation \mathcal{C}^k de suites de fonctions.

Question de cours 3

Énoncé du théorème de la double limite. (+ Définition d'un point adhérent)

2 Exercices

Exercice 1

Étudier la CVS et CVU de :

1. $f_n(x) = nx^n(1-x)$ sur $[0, 1]$.
2. $f_n(x) = (\sin(x))^n$ sur $[0, \pi/2]$.
3. $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$ sur \mathbb{R}_+
4. $f_n(x) = n \left(\arctan \left(x + \frac{1}{n} \right) - \arctan \left(x - \frac{1}{n} \right) \right)$ sur \mathbb{R}
5. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur \mathbb{R}_+
6. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur \mathbb{R}_+ puis sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.

Exercice 2 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Montrer $\int_{[a,b]} f(t) \sin(nt) dt \rightarrow 0$ pour f continue par morceaux à valeurs réelles, puis $\int_{[a,b]} f(t) e^{int} dt \rightarrow 0$ pour f continue par morceaux à valeurs complexes.

Exercice 3 (Théorème de Dini)

Soient $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ toutes croissantes sur $[a, b]$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVS vers $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

1. Montrer que f est croissante
2. Montrer que (f_n) CVU.

Exercice 4

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) := t^n(1-t)^n$.

1. Montrer que (f_n) CVU.
2. En déduire $\int_0^1 f_n \rightarrow 0$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2n+1-k}$

Exercice 5

Pour $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(t) = nte^{-nt^2}$.

1. Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.
2. En déduire le mode de convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.