Colles 2021-2022 S6 - Suites de fonctions

CVS = convergence simple, CVS = convergence uniforme

1 Questions de cours

Question de cours 1

Enoncé et démonstration du théorème d'intégration de suites de fonctions qui CVU sur un segment.

Solution

On peut réduire à "CVU sur tout segment de I".
Version primitive : Si $(f_n) \in (\mathcal{C}^0)^{\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I vers f alors $(h_n = \int_a^{\cdot} f_n)$ CVU aussi sur tout segment de I vers h et h est la primitive en a de f.

Question de cours 2

Enoncé du théorème de dérivation $\mathcal{C}^k$ de suites de fonctions.

Solution

Il faut que $g_n^{(k)}$ CVS pour $j \leq k-1$ et $g_n^{(k)}$ CVU. On peut réduire à "CVU sur tout segment de I".

Question de cours 3

Enoncé du théorème de la double limite. (+ Définition d'un point adhérent)

Solution

On peut parler de contiuité mais l'hypothèse "les f_n admettent une limite $L_n \in \mathbb{R}$ en a" suffit pour avoir $L_n \to L =: \lim_a f$.

2 Exercices

Exercice 1

Etudier la CVS et CVU de :

1. $f_n(x) = nx^n(1-x)$ sur $[0,1]$.
2. $f_n(x) = (\sin(x))^n$ sur $[0,\pi/2]$.
3. $f_n(x) = \dfrac{n}{1+n(1+x)}$ sur $\mathbb{R}_+$
4. $f_n(x) = n\left(\arctan\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - \arctan\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\right)$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}_+$
6. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a,+\infty[$, $a>0$.

Solution

1. CVU vers 0
2. CVS vers 0, problème en $\pi/2$
3. CVU sur $\mathbb{R}_+$ vers $\dfrac{1}{1+x}$
4. On montre la CVU par Taylor-Lagrange sur $g(x) = \arctan(x)$ à l'ordre deux et avec $h = 1/n$. Il faut majorer $|g(x+h) - g(x-h) - 2hg(-x)|$.
5. CVU sur $[a,+\infty[$ vers 0, pas CVU sur $\mathbb{R}_+$ avec par exemple $x_n = 1/n$.
6. CVU sur $[a,+\infty[$ vers 0, pas CVU sur $\mathbb{R}_+$ car la limite simple est un dirac (valeur 1) en 0.

Exercice 2 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Montrer $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\sin(nt)dt \to 0$ pour f continue par morceaux à valeurs réelles, puis $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)e^(int)dt \to 0$ pour f continue par morceaux à valeurs complexes.

Solution

On peut procéder par approximation par des fonctions en escalier, ou par densité des fonctions $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3 (Théorème de Dini)

Soient $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ toutes croissantes sur $[a,b]$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est croissante
2. Montrer que (f_n) CVU.

Solution

1. PLIL
2. Subdivision à pas régulier par Heine, puis croissance pour encadrer $f_n(x) - f(x)$ sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$: $f_n(x_i) - f(x_{i+1}) \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_{i+1}) - f(x_i)$. On majore ensuite le membre de gauche et de droite en valeur absolue par 2ε puis on conclut (rq : il suffit de majorer l'un et de minorer l'autre, mais plus simple en majorant comme un bourrin).

Exercice 4

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) := t^n(1-t)^n$.

1. Montrer que (f_n) CVU.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^1 f_n \to 0$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2n+1-k}$

Solution

1. Pas de pb particulier.
2. Théorème d'intégration+CVU sur un segment.
3. On a $I_n = (-1)^n S_n \to 0$.

Exercice 5

Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(t) = nte^{-nt^2}$.

1. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n$.
2. En déduire le mode de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.