Colles 2021-2022 S7 - Réduction

1 Questions de cours

Question de cours 1

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$. Calculer les coefficients de degré 0 et de degré $n-1$ du polynôme caractéristique χ_A de A.

Question de cours 2

Démontrer que le polynôme caractéristique est invariant par similitude.

Question de cours 3

Soit E de dimension finie et F un sev de E. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que $\chi_{u_{||F}}$ divise χ_u.

2 Exercices

Exercice 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
2. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer que $\chi_{J_r B} = \chi_{B J_r}$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 2 (Indice d'un endomorphisme)

Soir $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un entier r, appelé indice de u, tel que la suite $(\ker(u^k))_k$ soit stationnaire à partir du rang r exactement. Indication : montrer que la suite des noyaux itérés est croissante (strictement puis stationnaire).
2. On suppose maintenant que u est nilpotent. Montrer que r est l'indice de nilpotence de u.

Exercice 3

Réduire les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Trigonaliser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (Déterminant triangulaire par blocs)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$$

Exercice 6

Trouver les solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'équation $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent ssi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $Tr(u^k) = 0$.

Exercice 8

Montrer que A est diagonalisable ssi $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ l'est.