

Colles 2021-2022 S7 - Réduction

1 Questions de cours

Question de cours 1

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$. Calculer les coefficients de degré 0 et de degré $n - 1$ du polynôme caractéristique χ_A de A .

Question de cours 2

Démontrer que le polynôme caractéristique est invariant par similitude.

Question de cours 3

Soit E de dimension finie et F un sev de E . Soit u un endomorphisme de E . Montrer que $\chi_{u|_F}$ divise χ_u .

2 Exercices

Exercice 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que $\chi_{J_r B} = \chi_{B J_r}$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Solution

1. Trivial.
2. Ce polynôme commun est le polynôme caractéristique du bloc de taille r en haut à gauche de B .
3. On utilise le fait que $A = U J_r V$ et $B = U' J_s V'$.

Exercice 2 (Indice d'un endomorphisme)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un entier r , appelé indice de u , tel que la suite $(\ker(u^k))_k$ soit stationnaire à partir du rang r exactement. Indication : montrer que la suite des noyaux itérés est croissante (strictement puis stationnaire).
2. On suppose maintenant que u est nilpotent. Montrer que r est l'indice de nilpotence de u .

Solution

1. On remarque que la suite des noyaux itérés est croissante. Ensuite, on constate que le rang est une suite décroissante d'entiers naturels, donc elle stationne. (ou bien idem avec la suite des dimensions des noyaux qui elle croît et est bornée par n). (à montrer avec des epsilons! $\varepsilon = 1/4$ par exemple)
Autre point de vue : la suite des rangs est à valeurs dans un ensemble fini et est décroissante donc $\inf\{p \in \mathbb{N}, \text{rg}(u^p) = \text{rg}(u^{p+1})\}$ existe.
2. Si u est nilpotent, on sait qu'il existe un plus petit m tel que $u^m = 0$. Pour ce m , on a $\ker(u^m) = E \neq \ker(u^{m-1})$ (car $\ker(f) = 0$ ssi f est nul). Donc par la question précédente, $m = r$.

Exercice 3

Réduire les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

Solution

1. $\chi = (X+1)^2(X-1)$, $E_1 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{-1} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \{x+y=z\}$
2. $\chi = (X-3)(X-6)(X-9)$, $E_3 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_6 = \text{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_9 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $\chi = (X-2)(X+j)(X+j^2)$, $E_2 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_6 = \text{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_9 = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Trigonaliser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solution

1. $\chi = (X-2)^2(X-3)$, $E_3 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \text{vect} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, et on peut prendre $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour avoir une réduite de Jordan, ou sinon on complète (v_1, v_2) avec un vecteur v_3 au pif quitte à ré-exprimer Av_3 dans la base (v_i) (dernière colonne de P).
2. $\chi = (X-1)^2(X+1)$. On trouve $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\chi = (X-1)^3$. On trouve $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (Déterminant triangulaire par blocs)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$$

Solution

On procède par récurrence en développant selon la première colonne de A. Cela fait intervenir les cofacteurs $(-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A^{(i,1)}) =: \Delta_{i,1}(A)$ de la matrice A :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}_{n+1} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \times \begin{vmatrix} A^{(i,1)} & B^{(i)} \\ 0 & C \end{vmatrix}_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A^{(i,1)}) \times \det(C) \\ &= \det(A) \det(C) \end{aligned}$$

Exercice 6

Trouver les solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'équation $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve tout d'abord un polynôme annulateur pour M . On remarque que $A^2 = 2A$ et donc que $X(X-2)$ annule A. On a donc $(M^2 + M)(M^2 + M - 2I_2) = 0$. Donc $P = (X^2 + X)(X^2 + X - 2)$ annule M .

Ensuite, on voit que $P = X(X+1)(X-2)(X+1)$ est scindé à racines simples donc que M est diagonalisable.

On écrit donc $M = QDQ^{-1}$ avec Q inversible et $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. L'équation donne $Q^{-1}AQ = D$. Or A est

semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc on a $a^2 + a = 0$ et $b^2 + b = 2$, i.e $a \in \{0, -1\}$ et $b \in \{-2, 1\}$.

Ainsi, on n'a que 4 possibilités pour χ_M qui sont les 4 possibilités pour les valeurs propres (a, b) . Pour chaque cas, on exploite l'équation vérifiée par $M^2 + M$ et par $\chi_M(M)$. Par exemple, $M(M-1) = 0$ entraîne $M = M^2$ et donc $M = \frac{1}{2}A$. Idem pour le reste. On trouve à la fin :

$$M \in \left\{ \frac{1}{2}A, -A, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 7

Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent ssi $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(u^k) = 0$.

Solution

Le sens direct résulte de la trigonalisation.

Pour le sens indirect, on procède par récurrence sur n . Soit E de dimension $n + 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \text{Tr}(u^k) = 0$. On note $\sum_{k=0}^n a_k X^k + X^{n+1}$ le polynôme caractéristique de u , et on a par linéarité de la trace :

$$\sum_{k=0}^n a_k \text{Tr}(u^k) + \text{Tr}(u^{n+1}) = 0$$

d'où $a_0 = 0$. Donc 0 est valeur propre, et donc on peut prendre un vecteur non nul $x \in \text{Ker}(u)$. On complète (x) en une base de E . Dans cette base,

$$\text{mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & B \end{pmatrix}_{n+1}$$

avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier on remarque que $\text{mat}(u^k) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & B^k \end{pmatrix}_{n+1}$. Par invariance de la trace par changement de base (invariant partiel de similitude), on en déduit que l'endomorphisme v associé à B (dans une base, osé la quelle en fait) vérifie $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(v^k) = 0$. Ainsi, par hypothèse de récurrence on en déduit que v est nilpotent, et donc u aussi (il suffit de remarquer que u^r fait intervenir B^r qui est nulle).

Exercice 8

Montrer que A est diagonalisable ssi $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ l'est.

Solution

On diagonalise $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On voit alors que B est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ via les matrices de passage avec des I_n au lieu des 1 dans P et P^{-1} . Donc si B est diagonalisable, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} = Q \Delta Q^{-1}$ l'est aussi et donc en prenant un polynôme scindé à racines simples qui annule cette matrice on voit qu'il annule aussi A (et $2A$) d'où le résultat.