# Colles 2021-2022 S8 - Réduction 2

## 1 Questions de cours

**Question de cours 1**

Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est principal.

**Question de cours 2**

Montrer que si $P$ annule $u$ alors pour toute valeur propre de $u$, $P(\lambda) = 0$. Question subsidiaire : montrer que le spectre d'une matrice est fini. Question subsidiaire 2 : montrer que ce dernier est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.

**Question de cours 3**

Soient $I$ et $J$ deux idéaux de $A$. Déterminer si $I \cap J$, $I \cup J$, $I + J$ sont ou non des idéaux de $A$ (et le démontrer).

## 2 Exercices

**Exercice 1**

Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur, d'une symétrie, d'un endo nilpotent (à l'aide de l'indice de nilpotence).

**Exercice 2**

Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver les valeurs propres de $A$
2. A est-elle inversible ? Diagonalisable ?
3. Trouver $\Pi_A$
4. Trouver $A^n$ par division euclidienne de $X^n$ par $\Pi_A$.

**Exercice 3 (Indice d'un endomorphisme)**

Soir $u \in \mathcal{L}(E)$, $E$ de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un entier $r$, appelé indice de $u$, tel que la suite $(\ker(u^k))_k$ soit stationnaire à partir du rang $r$ exactement. Indication : montrer que la suite des noyaux itérés est croissante (strictement puis stationnaire).
2. On suppose maintenant que $u$ est nilpotent. Montrer que $r$ est l'indice de nilpotence de $u$.

**Exercice 4**

Trouver $Ann(\partial)$ (défini sur $\mathcal{C}\infty$).

**Exercice 5**

Montrer qu'un endo nilpotent en dimension fini vérifie : $\chi_u = \Pi_u \iff u$ cyclique $\iff u$ est semblable à un bloc de jordan nilpotent

**Exercice 6**

Soit $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A := (1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On considère $u : M \in E \mapsto M + \mathrm{Tr}(M)A \in E$. Trouver le polynôme minimal de $u$. L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?