Colles 2021-2022 S8 - Réduction 2

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est principal.

Question de cours 2

Montrer que si P annule u alors pour toute valeur propre de u, $P(\lambda) = 0$. Question subsidiaire : montrer que le spectre d'une matrice est fini. Question subsidiaire 2 : montrer que ce dernier est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.

Question de cours 3

Soient I et J deux idéaux de A. Déterminer si $I \cap J$, $I \cup J$, $I + J$ sont ou non des idéaux de A (et le démontrer).

2 Exercices

Exercice 1

Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur, d'une symétrie, d'un endo nilpotent (à l'aide de l'indice de nilpotence).

Exercice 2

Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver les valeurs propres de A
2. A est-elle inversible ? Diagonalisable ?
3. Trouver Π_A
4. Trouver A^n par division euclidienne de X^n par Π_A.

Solution

1. 1
2. Oui, non
3. $(X-1)^2$
4. $X^n = (X-1)^2 Q_n + R_n$ avec $\deg(R_n) \leq 1$. On a donc $R_n = a_n X + b_n$. En évaluant en 1 on trouve $1 = R(1) = a_n + b_n$, et en dérivant puis en ré-évaluant en 1 on trouve $n = a_n$. D'où $R = nX + 1 - n$. On en déduit $A^n = Q\Pi_A(A) + R_n(A) = nA + (1-n)I_3$ (valable pour tout n).

Exercice 3 (Indice d'un endomorphisme)

Soir $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un entier r, appelé indice de u, tel que la suite $(\ker(u^k))_k$ soit stationnaire à partir du rang r exactement. Indication : montrer que la suite des noyaux itérés est croissante (strictement puis stationnaire).
2. On suppose maintenant que u est nilpotent. Montrer que r est l'indice de nilpotence de u.

Solution

1. On remarque que la suite des noyaux itérés est croissante. Ensuite, on constate que le rang est une suite décroissante d'entiers naturels, donc elle stationne. (ou bien idem avec la suite des dimensions des noyaux qui elle croît et est bornée par n). (à montrer avec des epsilons ! $\varepsilon = 1/4$ par exemple)
   Autre point de vue : la suite des rangs est à valeurs dans un ensemble fini et est décroissante donc $\inf\{p \in \mathbb{N}, \mathrm{rg}(u^p) = \mathrm{rg}(u^{p+1}\}$ existe.
2. Si u est nilpotent, on sait qu'il existe un plus petit m tel que $u^m = 0$. Pour ce m, on a $\ker(u^m) = E \neq \mathrm{Ker}(u^{m-1})$ (car $\ker(f) = 0$ ssi f est nul). Donc par la question précédente, $m = r$.

Exercice 4

Trouver $Ann(\partial)$ (défini sur $\mathcal{C}\infty$).

Solution

C'est $\{0\}$.

Exercice 5

Montrer qu'un endo nilpotent en dimension fini vérifie : $\chi_u = \Pi_u \iff u$ cyclique $\iff u$ est semblable à un bloc de jordan nilpotent

Solution

Si $\chi_u = \Pi_u = x^n$ alors tout vecteur x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$ convient. Pour montrer que la famille est libre, on évalue successivement la combinaison linéaire qui apparaît en les puissances de u.
Si il existe une telle base, il suffit d'écrire la matrice de u dans cette base.
Si u est semblable à un bloc de Jordan nilpotent, on voit que les diviseurs stricts X^k de $\chi_u = X^n$ n'annulent pas u (il faut décrire l'effet de X^n sur le bloc de Jordan).

Exercice 6

Soit $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A := (1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On considère $u : M \in E \mapsto M + \mathrm{Tr}(M)A \in E$. Trouver le polynôme minimal de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution

On voit que $u^2(M) = M + \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(M + \mathrm{Tr}(M)A)A = M + 2\,\mathrm{Tr}(M)A + 0$ car A est de trace nulle. En particulier $u^2 = 2u - id_E$ donc le polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ annule u. Donc $\pi_u = (X-1)^2$ car $u - id_E \neq 0$ (sinon u serait l'identité, ce qui est faux par exemple en prenant $M = I_n$: on a $u(I_n) = I_n + nA \neq I_n$).
Ainsi u ne peut pas être annulé par un polynôme scindé à racines simples (sinon π_u serait scindé à racines simples), donc u n'est pas diagonalisable.