

Colles 2021-2022 S9 - Réduction 3 et normes

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est principal.

Question de cours 2

Montrer que si P annule u alors pour toute valeur propre de u , $P(\lambda) = 0$. Question subsidiaire : montrer que le spectre d'une matrice est fini. Question subsidiaire 2 : montrer que ce dernier est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.

Question de cours 3

Soient I et J deux idéaux de A . Déterminer si $I \cap J$, $I \cup J$, $I + J$ sont ou non des idéaux de A (et le démontrer).

Question de cours 4

Énoncer et démontrer le lemme de décomposition des noyaux pour deux polynômes.

Question de cours 5

Montrer que s'il existe un polynôme scindé annulant u , alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, et que sur chaque bloc, l'endomorphisme induit est la somme d'un endomorphisme nilpotent et d'une homothétie.

Question de cours 6

Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.

2 Exercices

Exercice 1

Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur, d'une symétrie, d'un endo nilpotent (à l'aide de l'indice de nilpotence).

Exercice 2

Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver les valeurs propres de A
2. A est-elle inversible ? Diagonalisable ?
3. Trouver Π_A
4. Trouver A^n par division euclidienne de X^n par Π_A .

Exercice 3 (Indice d'un endomorphisme)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un entier r , appelé indice de u , tel que la suite $(\ker(u^k))_k$ soit stationnaire à partir du rang r exactement. Indication : montrer que la suite des noyaux itérés est croissante (strictement puis stationnaire).
2. On suppose maintenant que u est nilpotent. Montrer que r est l'indice de nilpotence de u .

Exercice 4

Trouver $\text{Ann}(\partial)$ (défini sur $\mathcal{C}\infty$).

Exercice 5

Montrer qu'un endo nilpotent en dimension finie vérifie : $\chi_u = \Pi_u \iff u$ cyclique $\iff u$ est semblable à un bloc de Jordan nilpotent

Exercice 6

Soit $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A := (1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On considère $u : M \in E \mapsto M + \text{Tr}(M)A \in E$. Trouver le polynôme minimal de u . L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 7

Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Indication : on pourra trouver le polynôme caractéristique de A puis considérer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur un espace stable F .

Exercice 8

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 + u + id_{\mathbb{R}^n} = 0$.

1. Soit F un espace stable par u . Soit $x \notin F$. Montrer que $\text{vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u et qu'il est en somme directe avec F .
2. (a) Montrer que si $n = 2p$ est pair et si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ alors la matrice de u dans cette base est diagonale par blocs de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
 (b) Montrer que réciproquement si u est semblable à une telle matrice par blocs, alors n est pair et la base correspondante vérifie $e_{2k} = u(e_{2k-1})$.
 (c) En justifiant à l'aide de la question 1 l'existence de $p = \max(A)$ où $A := \{k \in \mathbb{N}, \exists (e_1, \dots, e_k); (e_1, u(e_1), \dots, e_k, u(e_k)) \text{ libre}\}$, montrer qu'il existe une telle base et en particulier que n est pair.

Exercice 9

Existe-t-il une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a un polynôme minimal de $X^2 + 1$?

Exercice 10

1. Montrer que $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable ssi A^2 est diagonalisable.
2. Soient $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $M := \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ssi AB est diagonalisable.

Exercice 11

1. Dans $\mathbb{C}$ on peut prendre des racines de la matrice diagonale (non unicité).
2. $M^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$ est diagonalisable ssi AB et BA le sont. En effet le sens réciproque se voit (on prend comme matrice de passage $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ où P et Q sont les matrices de passage pour AB et BA).
 Pour le sens direct, on voit qu'un polynôme Q annule M^2 ssi il annule AB et BA . Enfin, on remarque que si AB est diagonalisable alors $BA = (A^{-1}P)D(A^{-1}P)^{-1}$ aussi, et vice-versa par symétrie des rôles.

Exercice 12

Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ annulé par un $P = QR \in \mathbb{K}[X]$. On suppose $Q \wedge R = 1$. Montrer que $\text{Ker}(Q(u)) = \text{Im}(R(u))$.

Exercice 13

Montrer que l'application $N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto N(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14

Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 15

Soit $E := \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ définit une norme sur E . Est-ce que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur E ?